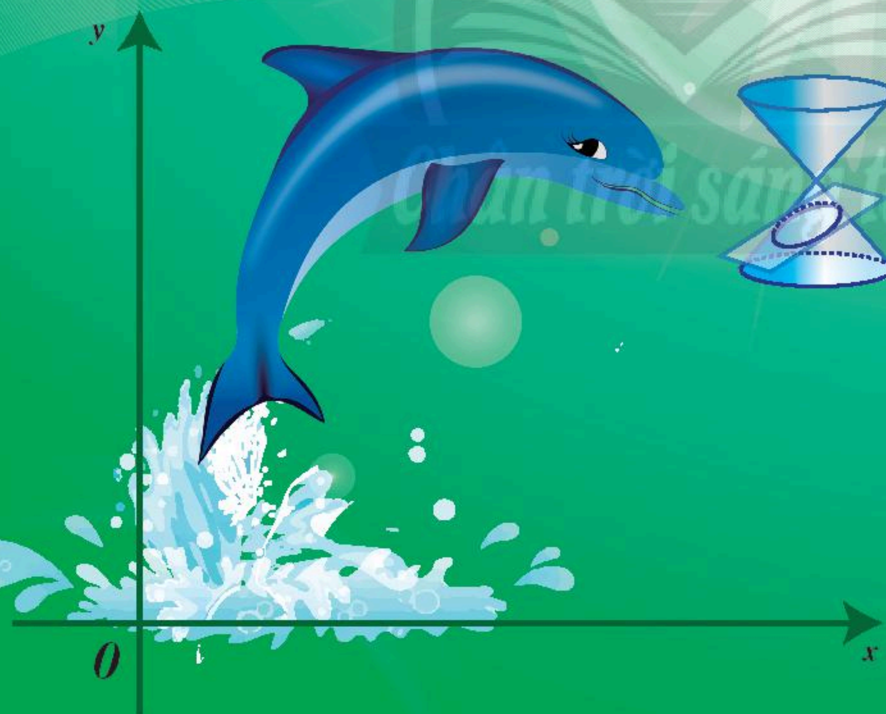
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN 10

TẬP HAI



	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

10

TẬP HAI

Chân trời sáng tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 10** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách ***Toán 10*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách ***Toán 10*** được chia thành hai tập.

Tập hai bao gồm ba phần:

Đại số và Một số yếu tố Giải tích gồm hai chương: *Bất phương trình bậc hai một ẩn*; *Đại số tổ hợp*.

Hình học và Đo lường gồm một chương: *Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng*.

Thống kê và Xác suất gồm một chương: *Xác suất*.

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: *khởi động*, *khám phá*, *thực hành*, *vận dụng*. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 10*** sẽ hỗ trợ tích cực và hiệu quả quý thầy, cô giáo trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương VII BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Trong khoa học công nghệ và thực tế cuộc sống, con người rất thường gặp các bài toán trong đó cần sử dụng mô hình hàm số bậc hai. Trong chương III, ta đã học về hàm số bậc hai và đồ thị của chúng. Trong chương này, ta sẽ giải bất phương trình bậc hai một ẩn, một số phương trình quy về phương trình bậc hai, đồng thời vận dụng được bất phương trình bậc hai một ẩn để giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Cá heo ở trên không trong thời gian bao lâu?

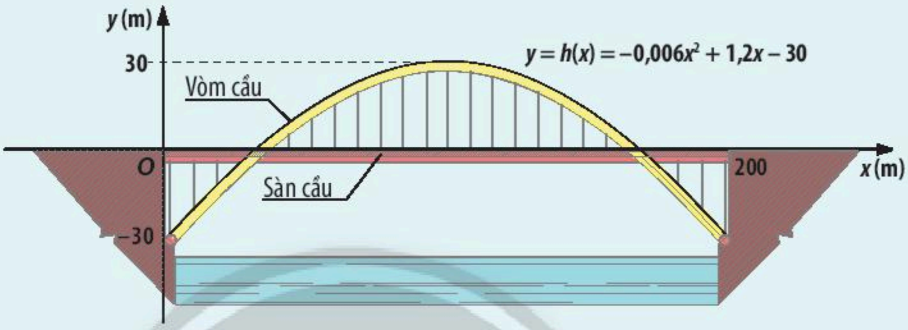
Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được tam thức bậc hai. Giải thích được định lí về dấu của tam thức bậc hai từ việc quan sát đồ thị của hàm số bậc hai.
– Giải được bất phương trình bậc hai.
– Giải được một số dạng phương trình chứa căn thức và quy về được phương trình bậc hai.
– Vận dụng được bất phương trình bậc hai một ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Bài 1. Dấu của tam thức bậc hai

Từ khoá: **Tam thức bậc hai; Dấu của tam thức bậc hai; Nghiệm của tam thức bậc hai; Biệt thức của tam thức bậc hai.**

Cầu vòm được thiết kế với thanh vòm hình parabol và mặt cầu đi ở giữa. Trong hệ trục toạ độ *Oxy* như hình vẽ, phương trình của vòm cầu là $y = h(x) = -0{,}006x^2 + 1{,}2x - 30$. Với giá trị $h(x)$ như thế nào thì tại vị trí x ($0 \le x \le 200$), vòm cầu: cao hơn mặt cầu, thấp hơn mặt cầu?

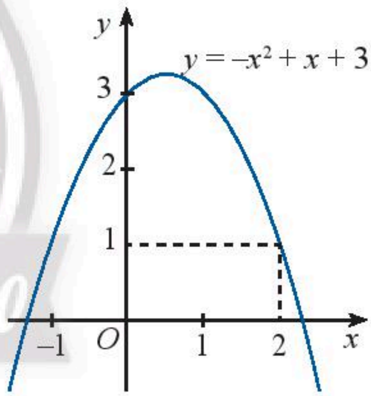


1. Tam thức bậc hai

Đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^2 + x + 3$ được biểu diễn trong Hình 1.

a) Biểu thức $f(x)$ là đa thức bậc mấy?

b) Xác định dấu của $f(2)$.



Hình 1

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$ và x là biến số được gọi là ***tam thức bậc hai***.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi thay x bằng giá trị x_0 vào $f(x)$, ta được $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, gọi là ***giá trị của tam thức bậc hai*** tại x_0.

- Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta nói $f(x)$ dương tại x_0;
- Nếu $f(x_0) < 0$ thì ta nói $f(x)$ âm tại x_0;
- Nếu $f(x)$ dương (âm) tại mọi điểm x thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói $f(x)$ dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

Ví dụ 1

Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai? Nếu là tam thức bậc hai, hãy xét dấu của nó tại $x = 2$.

a) $f(x) = -x^2 + x + 3$; b) $g(x) = -3x + \frac{13}{2}$.

Giải

a) Biểu thức $f(x) = -x^2 + x + 3$ là một tam thức bậc hai.

$f(2) = -2^2 + 2 + 3 = 1 > 0$ nên $f(x)$ dương tại $x = 2$.

b) Biểu thức $g(x) = -3x + \frac{13}{2}$ không phải là một tam thức bậc hai.

1 Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai? Nếu là tam thức bậc hai, hãy xét dấu của nó tại $x = 1$.

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$; b) $g(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$; c) $h(x) = -x^2 + \sqrt{2}\,x - 3$.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi đó:

- Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ là ***nghiệm*** của $f(x)$.
- Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ lần lượt là ***biệt thức*** và ***biệt thức thu gọn*** của $f(x)$.

Ví dụ 2

Tìm biệt thức và nghiệm của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 4$; b) $g(x) = 2x^2 + x + 1$; c) $h(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x - 4$ có $\Delta = 2^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-4) = 20$.

Do đó, $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1+\sqrt{5} \text{ và } x_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = -1-\sqrt{5}.$$

b) Tam thức bậc hai $g(x) = 2x^2 + x + 1$ có $\Delta = 1^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, 1 = -7$.

Vì $\Delta < 0$ nên $g(x)$ vô nghiệm.

c) Tam thức bậc hai $h(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$ có $\Delta = 1^2 - 4 \,.\, (-1) \,.\, \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$.

Do đó, $h(x)$ có nghiệm kép là $x = \frac{1}{2}$.

2 Tìm biệt thức và nghiệm của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$; b) $g(x) = -x^2 + 6x - 9$; c) $h(x) = 4x^2 - 4x + 9$.

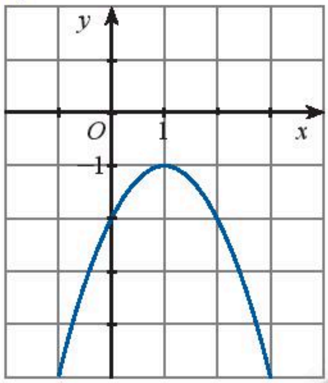
2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

2 Quan sát đồ thị của các hàm số bậc hai trong các hình dưới đây. Trong mỗi trường hợp, hãy cho biết:

– Các nghiệm (nếu có) và dấu của biệt thức Δ.

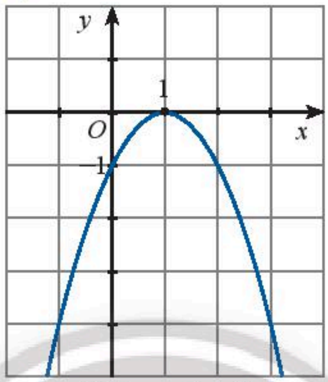
– Các khoảng giá trị của x mà trên đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số của x^2.

a)



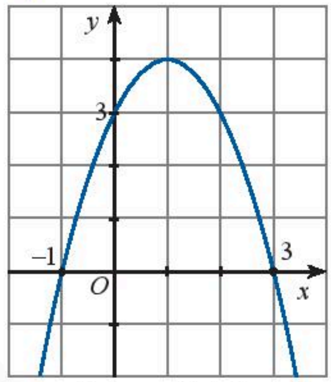
$y = f(x) = -x^2 + 2x - 2$

b)



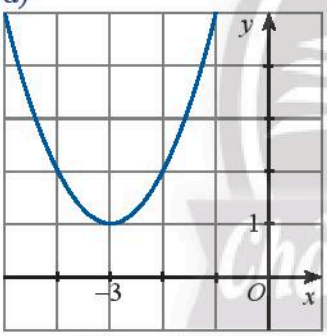
$y = f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c)



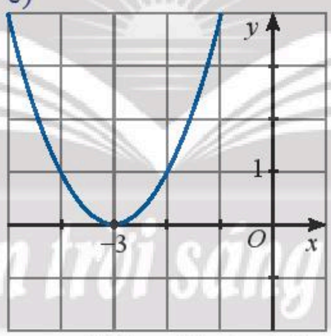
$y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$

d)



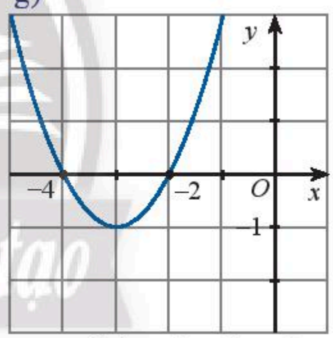
$y = f(x) = x^2 + 6x + 10$

e)



$y = f(x) = x^2 + 6x + 9$

g)



$y = f(x) = x^2 + 6x + 8$

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị x.
- Nếu $\Delta = 0$ và $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ là nghiệm kép của $f(x)$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x khác x_0.
- Nếu $\Delta > 0$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ $(x_1 < x_2)$ thì $f(x)$ trái dấu với a với mọi x trong khoảng $(x_1; x_2)$; $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x thuộc hai khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$.

Chú ý:

a) Để xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức Δ;

Bước 2: Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có);

Bước 3: Xác định dấu của hệ số a;

Bước 4: Xác định dấu của $f(x)$.

b) Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

Ví dụ 3

Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$; b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$; c) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

Giải

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ có $\Delta = 49 > 0$, hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ và $a = -1 < 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x)$ dương trong khoảng $(-2; 5)$ và âm trong hai khoảng $(-\infty; -2)$ và $(5; +\infty)$.

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép là $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ và $a = 4 > 0$.

Vậy $f(x)$ dương với mọi $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

c) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ có $\Delta = -4 < 0$ và $a = 2 > 0$. Vậy $f(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3 Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$; b) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Xét dấu tam thức bậc hai $h(x) = -0{,}006x^2 + 1{,}2x - 30$ trong bài toán khởi động và cho biết ở khoảng cách nào tính từ đầu cầu O thì vòm cầu: cao hơn mặt cầu, thấp hơn mặt cầu.

BÀI TẬP

1. Đa thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

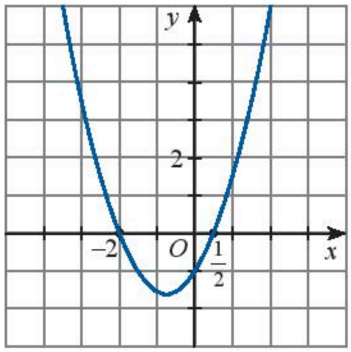
a) $4x^2 + 3x + 1$; b) $x^3 + 3x^2 - 1$; c) $2x^2 + 4x - 1$.

2. Xác định giá trị của m để các đa thức sau là tam thức bậc hai.

a) $(m + 1)x^2 + 2x + m$; b) $mx^3 + 2x^2 - x + m$; c) $-5x^2 + 2x - m + 1$.

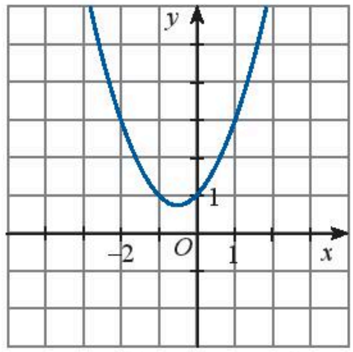
3. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai sau đây, hãy lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

a)



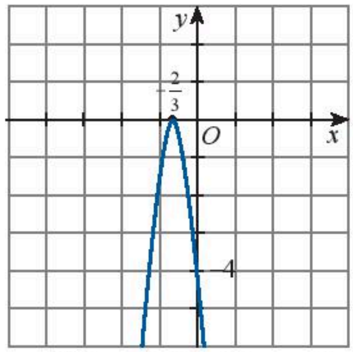
$f(x) = x^2 + 1,5x - 1$

b)



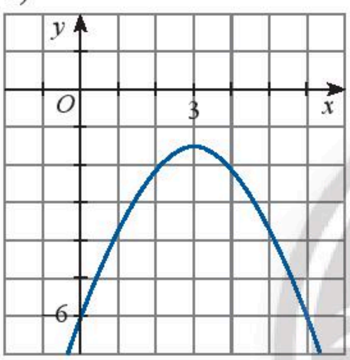
$g(x) = x^2 + x + 1$

c)



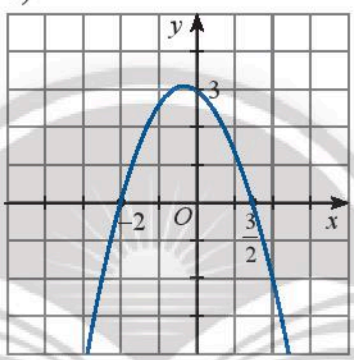
$h(x) = -9x^2 - 12x - 4$

d)



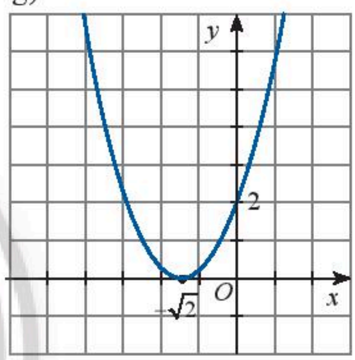
$f(x) = -0,5x^2 + 3x - 6$

e)



$g(x) = -x^2 - 0,5x + 3$

g)



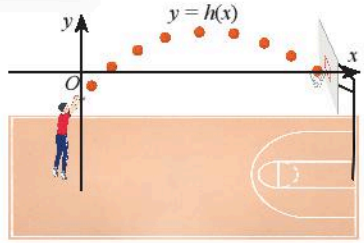
$h(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

4. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau đây:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$; b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 21$; c) $f(x) = -2x^2 + x - 2$;

d) $f(x) = -4x(x + 3) - 9$; e) $f(x) = (2x + 5)(x - 3)$.

5. Độ cao (tính bằng mét) của một quả bóng so với vành rổ khi bóng di chuyển được x mét theo phương ngang được mô phỏng bằng hàm số $h(x) = -0,1x^2 + x - 1$. Trong các khoảng nào của x thì bóng nằm: cao hơn vành rổ, thấp hơn vành rổ và ngang vành rổ? Làm tròn các kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

6. Một khung dây thép hình chữ nhật có chiều dài 20 cm và chiều rộng 15 cm được uốn lại thành khung hình chữ nhật mới có kích thước $(20 + x)$ cm và $(15 - x)$ cm. Với x nằm trong các khoảng nào thì diện tích của khung sau khi uốn: tăng lên, không thay đổi, giảm đi?

7. Chứng minh rằng với mọi số thực m ta luôn có $9m^2 + 2m > -3$.

8. Tìm giá trị của m để:

a) $2x^2 + 3x + m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; b) $mx^2 + 5x - 3 \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Từ khoá: Bất phương trình bậc hai một ẩn; Nghiệm của bất phương trình bậc hai một ẩn.

Với giá trị nào của x thì tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ mang dấu dương?

Trong chương II, ta đã biết đến bất phương trình và biết cách giải bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Trong bài này, chúng ta cùng tìm hiểu bất phương trình bậc hai một ẩn.

Lợi nhuận (I) thu được trong một ngày từ việc kinh doanh một loại gạo của cửa hàng phụ thuộc vào giá bán (x) của một kilôgam loại gạo đó theo công thức $I = -3x^2 + 200x - 2\,325$, với I và x được tính bằng nghìn đồng. Giá trị x như thế nào thì cửa hàng có lãi từ loại gạo đó?

Hình 1

Bất phương trình bậc hai một ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax^2 + bx + c \le 0,\ \ ax^2 + bx + c < 0,\ \ ax^2 + bx + c \ge 0,\ \ ax^2 + bx + c > 0,$$

với $a \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình bậc hai là các giá trị của biến x mà khi thay vào bất phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1

Các bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn? Nếu là bất phương trình bậc hai một ẩn, $x = 1$ và $x = 2$ có là nghiệm của bất phương trình đó hay không?

a) $x^2 + x - 3 \ge 0$; b) $3x^3 + x^2 - 1 \le 0$.

Giải

a) $x^2 + x - 3 \ge 0$ là một bất phương trình bậc hai một ẩn.

Vì $1^2 + 1 - 3 = -1 < 0$ nên $x = 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình trên.

Vì $2^2 + 2 - 3 = 3 > 0$ nên $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

b) $3x^3 + x^2 - 1 \le 0$ không phải là một bất phương trình bậc hai một ẩn.

1 Các bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn? Nếu là bất phương trình bậc hai một ẩn, $x = 2$ có là nghiệm của bất phương trình đó hay không?

a) $x^2 + x - 6 \le 0$; b) $x + 2 > 0$; c) $-6x^2 - 7x + 5 > 0$.

Giải bất phương trình bậc hai là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

Ta có thể giải bất phương trình bậc hai bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

Ví dụ 2

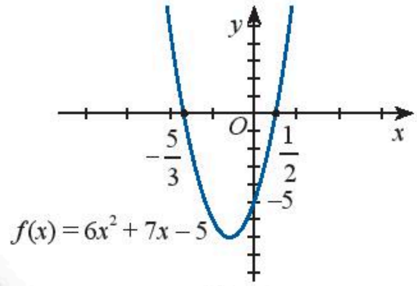
Giải bất phương trình bậc hai $6x^2 + 7x - 5 > 0$.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = 6x^2 + 7x - 5$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -\frac{5}{3}$ và $x_2 = \frac{1}{2}$, $a = 6 > 0$ nên $f(x)$ dương với mọi x thuộc hai khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy bất phương trình $6x^2 + 7x - 5 > 0$ có tập nghiệm là $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lưu ý: Có thể sử dụng đồ thị hàm số $f(x) = 6x^2 + 7x - 5$ (Hình 2) để giải bất phương trình $f(x) > 0$.



Hình 2

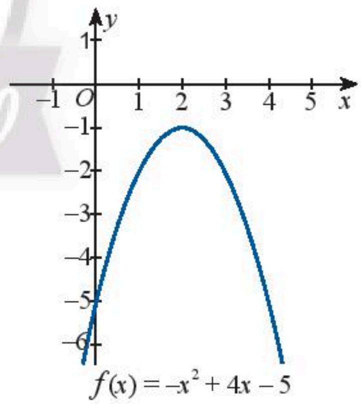
Ví dụ 3

Giải bất phương trình bậc hai $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ có $\Delta' = -1 < 0$; $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy bất phương trình $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ vô nghiệm.

Lưu ý: Trong trường hợp này, đồ thị hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ (Hình 3) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên bất phương trình $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ vô nghiệm.



Hình 3

2 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

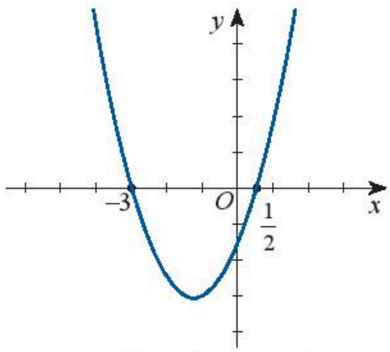
a) $15x^2 + 7x - 2 \leq 0$; b) $-2x^2 + x - 3 < 0$.

Hãy giải bất phương trình lập được trong và tìm giá bán gạo sao cho cửa hàng có lãi.

BÀI TẬP

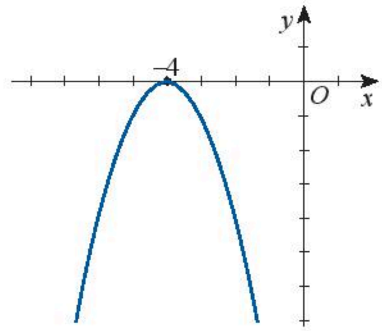
1. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai tương ứng, hãy xác định tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai sau đây:

a) $x^2 + 2{,}5x - 1{,}5 \le 0$



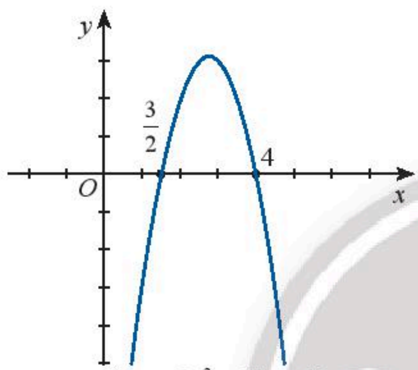
$f(x) = x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$

b) $-x^2 - 8x - 16 < 0$



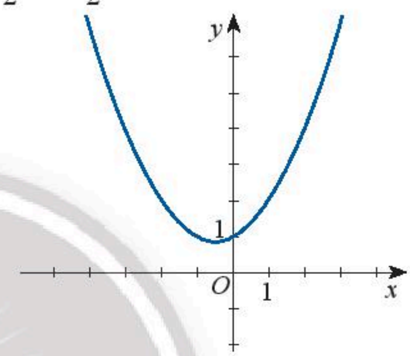
$f(x) = -x^2 - 8x - 16$

c) $-2x^2 + 11x - 12 > 0$



$f(x) = -2x^2 + 11x - 12$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \le 0$



$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

2. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 15x + 28 \ge 0$;

b) $-2x^2 + 19x + 255 > 0$;

c) $12x^2 < 12x - 8$;

d) $x^2 + x - 1 \ge 5x^2 - 3x$.

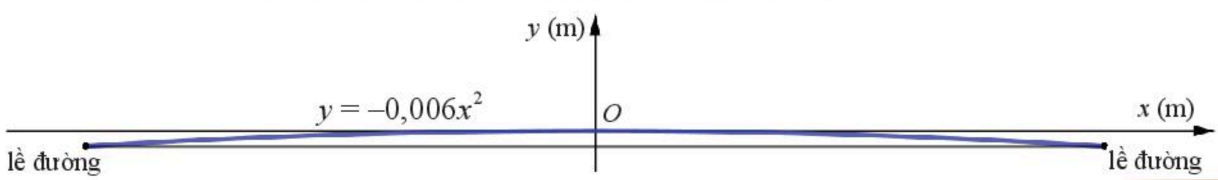
3. Kim muốn trồng một vườn hoa trên mảnh đất hình chữ nhật và làm hàng rào bao quanh. Kim chỉ có đủ vật liệu để làm 30 m hàng rào nhưng muốn diện tích vườn hoa ít nhất là 50 m². Hỏi chiều rộng của vườn hoa nằm trong khoảng nào?

4. Một quả bóng được ném thẳng lên từ độ cao 1,6 m so với mặt đất với vận tốc 10 m/s. Độ cao của bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi hàm số $h(t) = -4{,}9t^2 + 10t + 1{,}6$. Hỏi:

a) Bóng có thể cao trên 7 m không?

b) Bóng ở độ cao trên 5 m trong khoảng thời gian bao lâu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

5. Mặt cắt ngang của mặt đường thường có dạng hình parabol để nước mưa dễ dàng thoát sang hai bên. Mặt cắt ngang của một con đường được mô tả bằng hàm số $y = -0{,}006x^2$ với gốc toạ độ đặt tại tim đường và đơn vị đo là mét như trong Hình 4. Với chiều rộng của đường như thế nào thì tim đường cao hơn lề đường không quá 15 cm?



Hình 4

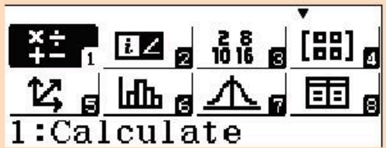
Bạn có biết?

Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của bất phương trình bậc hai một ẩn

Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tìm nghiệm của bất phương trình bậc hai một ẩn một cách tiện lợi và nhanh chóng.

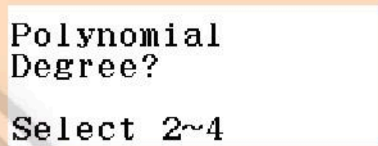
Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Sau khi mở máy, ấn phím [MENU] để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

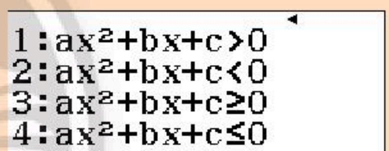


Ấn các phím ▼ ▼ ▶ để di chuyển đến mục **Inequality** (bất đẳng thức).

Ấn phím [=] để chọn mục **Inequality**, sau đó ấn tiếp phím [2] để chọn bất phương trình bậc hai.



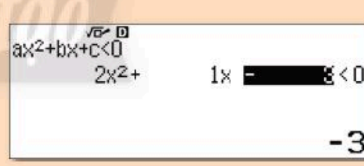
Ấn phím [1], [2], [3] hoặc [4] để chọn dạng của bất phương trình.



Ví dụ

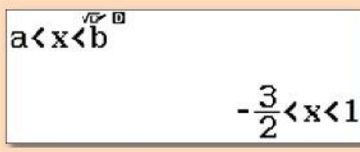
Dùng máy tính cầm tay để giải bất phương trình $2x^2 + x - 3 < 0$.

Sau khi thực hiện các bước như ở trên, ta ấn liên tiếp các phím sau đây để nhập hệ số của bất phương trình:
[2] [=] [1] [=] [−] [3] [=]



Ấn tiếp phím [=] để được kết quả như hình bên.

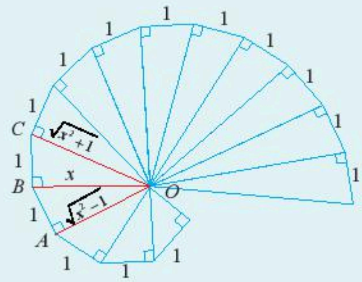
Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.



Bài 3. Phương trình quy về phương trình bậc hai

Từ khoá: Phương trình bậc hai; Phương trình chứa căn thức.

Trong hình bên, các tam giác vuông được xếp với nhau để tạo thành một đường tương tự đường xoắn ốc. Với x bằng bao nhiêu thì $OA = \frac{1}{2}OC$?



Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{dx^2+ex+f}$

1 Lời giải cho phương trình $\sqrt{-2x^2-2x+11} = \sqrt{-x^2+3}$ như sau đúng hay sai?

$\sqrt{-2x^2-2x+11} = \sqrt{-x^2+3}$

$-2x^2 - 2x + 11 = -x^2 + 3$ *(bình phương cả hai vế để làm mất dấu căn)*

$x^2 + 2x - 8 = 0$ *(chuyển vế, rút gọn)*

$x = 2$ hoặc $x = -4$. *(giải phương trình bậc hai)*

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 2 và -4.

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{dx^2+ex+f}$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x^2-6x-8} = \sqrt{x^2-5x-2}$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$2x^2 - 6x - 8 = x^2 - 5x - 2$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = -2$ hoặc $x = 3$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -2$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

1 Giải phương trình $\sqrt{31x^2 - 58x + 1} = \sqrt{10x^2 - 11x - 19}$.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

2 Lời giải cho phương trình $\sqrt{-x^2 + x + 1} = x$ như sau đúng hay sai?

$\sqrt{-x^2 + x + 1} = x$

$-x^2 + x + 1 = x^2$ *(bình phương cả hai vế để làm mất dấu căn)*

$-2x^2 + x + 1 = 0$ *(chuyển vế, rút gọn)*

$x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{1}{2}$. *(giải phương trình bậc hai)*

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 1 và $-\dfrac{1}{2}$.

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 5x - 13} = x + 1$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$3x^2 + 5x - 13 = (x + 1)^2$$

$$3x^2 + 5x - 13 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$x = -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x = 2.$$

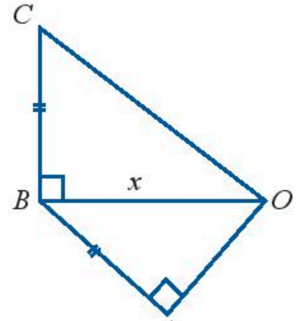
Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 2$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

2 Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 27x - 41} = 2x + 3$.

Cho các tam giác OAB và OBC lần lượt vuông tại A và B như Hình 1. Các cạnh AB và BC bằng nhau và ngắn hơn OB là 1 cm. Hãy biểu diễn độ dài OC và OA qua OB, từ đó xác định OB để:

a) $OC = 3OA$; b) $OC = \frac{5}{4}OB$.



Hình 1

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{11x^2 - 14x - 12} = \sqrt{3x^2 + 4x - 7}$; b) $\sqrt{x^2 + x - 42} = \sqrt{2x - 30}$;

c) $2\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$; d) $3\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{7x^2 + 2x - 5} = 0$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3$; b) $\sqrt{x^2 - x - 4} = x + 2$;

c) $2 + \sqrt{12 - 2x} = x$; d) $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} = -5$.

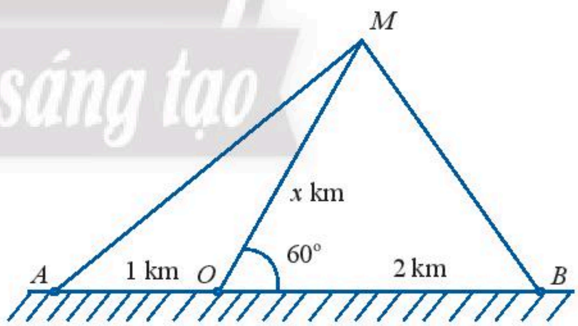
3. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB ngắn hơn AC là 2 cm.

a) Biểu diễn độ dài cạnh huyền BC theo AB.

b) Biết chu vi của tam giác ABC là 24 cm. Tìm độ dài ba cạnh của tam giác đó.

4. Một con tàu biển M rời cảng O và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc 60°. Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía so với cảng O và lần lượt cách cảng O khoảng cách 1 km và 2 km (Hình 2).

a) Đặt độ dài của MO là x km. Biểu diễn khoảng cách từ tàu đến A và từ tàu đến B theo x.



Hình 2

b) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B bằng $\frac{4}{5}$ khoảng cách từ tàu đến A.

c) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B nhỏ hơn khoảng cách từ tàu đến O đúng 500 m.

Lưu ý: Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 6x^2 + 41x + 44$;

b) $g(x) = -3x^2 + x - 1$;

c) $h(x) = 9x^2 + 12x + 4$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $7x^2 - 19x - 6 \geq 0$;

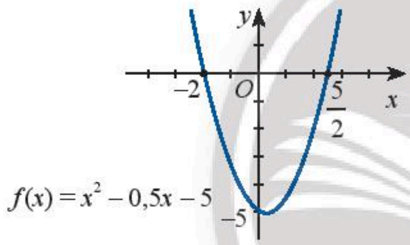
b) $-6x^2 + 11x > 10$;

c) $3x^2 - 4x + 7 > x^2 + 2x + 1$;

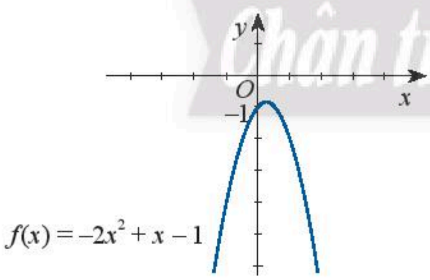
d) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

3. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai được cho, hãy giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 0,5x - 5 \leq 0$



b) $-2x^2 + x - 1 > 0$



4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 7x} = \sqrt{-9x^2 - 8x + 3}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 8} - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = 0$;

c) $\sqrt{4x^2 + x - 1} = x + 1$;

d) $\sqrt{2x^2 - 10x - 29} = \sqrt{x - 8}$.

5. Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông ngắn hơn cạnh huyền 8 cm. Tính độ dài của cạnh huyền, biết chu vi tam giác bằng 30 cm.

6. Một quả bóng được bắn thẳng lên từ độ cao 2 m với tốc độ ban đầu là 30 m/s. Khoảng cách của bóng so với mặt đất sau t giây được cho bởi hàm số

$$h(t) = -4,9t^2 + 30t + 2$$

với $h(t)$ tính bằng đơn vị mét. Hỏi quả bóng nằm ở độ cao trên 40 m trong thời gian bao lâu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

7. Một chú cá heo nhảy lên khỏi mặt nước. Độ cao h (mét) của cá heo so với mặt nước sau t giây được cho bởi hàm số

$$h(t) = -4,9t^2 + 9,6t.$$

Tính khoảng thời gian cá heo ở trên không.

8. Lợi nhuận một tháng $p(x)$ của một quán ăn phụ thuộc vào giá trung bình x của các món ăn theo công thức $p(x) = -30x^2 + 2\,100x - 15\,000$, với đơn vị tính bằng nghìn đồng. Nếu muốn lợi nhuận không dưới 15 triệu đồng một tháng thì giá bán trung bình của các món ăn cần nằm trong khoảng nào?

9. Quỹ đạo của một quả bóng được mô tả bằng hàm số

$$y = f(x) = -0,03x^2 + 0,4x + 1,5$$

với y (tính bằng mét) là độ cao của quả bóng so với mặt đất khi độ dịch chuyển theo phương ngang của bóng là x (tính bằng mét). Để quả bóng có thể ném được qua lưới cao 2 m, người ném phải đứng cách lưới bao xa? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Chương VIII Đại số tổ hợp

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai quy tắc đếm, các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và vận dụng chúng để giải các bài toán đếm rất phong phú trong thực tiễn. Chúng ta cũng làm quen với khai triển nhị thức Newton.

Tại sao nên chọn mật khẩu nhiều kí tự?

Học xong chương này, bạn có thể:

– Vận dụng được quy tắc cộng, quy tắc nhân trong một số tình huống đơn giản.

– Vận dụng sơ đồ hình cây, các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để giải các bài toán đếm trong những tình huống khác nhau.

– Sử dụng máy tính cầm tay để tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

– Khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n$ với số mũ $n \leq 5$.

Bài 1. Quy tắc cộng và quy tắc nhân

Từ khoá: Quy tắc cộng; Quy tắc nhân.

Một công ty dự kiến tạo các mã số nhân viên, mỗi mã số có ba kí tự gồm một chữ cái tiếng Anh viết hoa đứng trước hai chữ số. Tuy nhiên, họ đang băn khoăn rằng số mã số như vậy có đủ để cấp cho mỗi nhân viên của họ một mã số riêng hay không. Họ cần làm gì để biết được điều đó?

1. Quy tắc cộng

1 Trong một cửa hàng bán kem có 5 loại kem que và 4 loại kem ốc quế như Hình 1. Có bao nhiêu cách chọn mua một loại kem que hoặc kem ốc quế ở cửa hàng này?

Hình 1

Trong hoạt động trên, có thể coi việc chọn mua một loại kem là một công việc có hai phương án thực hiện. Phương án thứ nhất là chọn kem que, có 5 cách thực hiện. Phương án thứ hai là chọn kem ốc quế, có 4 cách thực hiện. Số cách chọn là tổng số cách thực hiện của cả hai phương án này.

Tổng quát, ta có quy tắc sau đây:

Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc B. Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m + n$ cách.

Ví dụ 1

Lớp 10A có 36 học sinh, lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu cách cử một học sinh của lớp 10A hoặc của lớp 10B tham gia một công việc tình nguyện sắp diễn ra?

Giải

Công việc cử một học sinh có hai phương án thực hiện:

Phương án 1: Cử một học sinh của lớp 10A, có 36 cách thực hiện.

Phương án 2: Cử một học sinh của lớp 10B, có 40 cách thực hiện.

Ta thấy mỗi cách thực hiện của phương án này không trùng với bất kì cách nào của phương án kia. Do đó, theo quy tắc cộng, có $36 + 40 = 76$ cách cử một học sinh thuộc một trong hai lớp tham gia công việc tình nguyện.

Mở rộng hơn, trong ví dụ sau đây, ta xét công việc có ba phương án thực hiện.

Ví dụ 2

Mỗi ngày có 6 chuyến xe khách, 3 chuyến tàu hoả và 4 chuyến máy bay từ thành phố *A* đến thành phố *B*. Mỗi ngày có bao nhiêu cách chọn chuyến di chuyển từ thành phố *A* đến thành phố *B* bằng một trong ba loại phương tiện trên?

Giải

Việc di chuyển từ *A* đến *B* có ba phương án thực hiện.

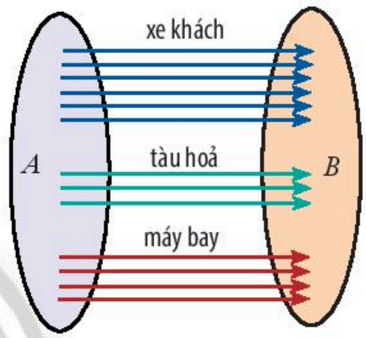
Phương án 1: Di chuyển bằng xe khách, có 6 cách chọn chuyến.

Phương án 2: Di chuyển bằng tàu hoả, có 3 cách chọn chuyến.

Phương án 3: Di chuyển bằng máy bay, có 4 cách chọn chuyến.

Áp dụng quy tắc cộng, ta có số cách chọn chuyến để di chuyển từ *A* đến *B* là

$$6 + 3 + 4 = 13 \text{ (cách)}.$$



Hình 2

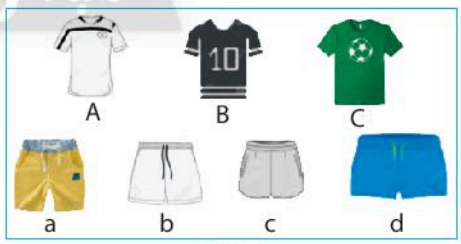
1 Hà có 5 cuốn sách khoa học, 4 cuốn tiểu thuyết và 3 cuốn truyện tranh (các sách khác nhau từng đôi một). Hà đồng ý cho Nam mượn một cuốn sách trong số đó để đọc. Nam có bao nhiêu cách chọn một cuốn sách để mượn?

2. Quy tắc nhân

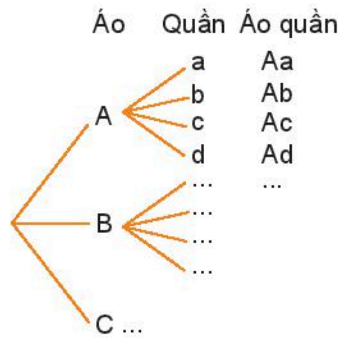
2 An có 3 chiếc áo và 4 chiếc quần thể thao. An muốn chọn một bộ quần áo trong số đó để mặc chơi thể thao cuối tuần này.

a) Vẽ vào vở và hoàn thành sơ đồ hình cây như Hình 4 để thể hiện tất cả các khả năng mà An có thể lựa chọn một bộ quần áo.

b) An có bao nhiêu cách lựa chọn bộ quần áo? Hãy giải thích.



Hình 3



Hình 4

Công việc chọn quần áo của bạn An ở trên có thể coi gồm hai công đoạn:

• *Công đoạn thứ nhất:* Chọn một chiếc áo từ 3 chiếc áo. Có 3 cách thực hiện công đoạn này.

• *Công đoạn thứ hai:* Ứng với mỗi cách chọn một chiếc áo, có 4 cách chọn một chiếc quần.

Từ sơ đồ hình cây ta thấy số cách thực hiện công việc của bạn An là tích của số cách thực hiện hai công đoạn trên.

Tổng quát, ta có quy tắc sau:

Quy tắc nhân

Giả sử một công việc được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m.n$ cách.

Ví dụ 3

Có ba thị trấn A, B, C. Có 5 con đường để đi từ A đến B; có 3 con đường để đi từ B đến C. Có bao nhiêu cách chọn một con đường để đi từ A, qua B rồi đến C?

Hình 5

Giải

Việc đi từ A, qua B rồi đến C gồm 2 công đoạn:

Công đoạn thứ nhất: Đi từ A đến B, có 5 cách chọn đường đi.

Công đoạn thứ hai: Ứng với mỗi cách chọn đường đi từ A đến B, có 3 cách chọn đường đi từ B tới C.

Theo quy tắc nhân, có $5 \cdot 3 = 15$ cách chọn đường để đi từ A, qua B rồi đến C.

Mở rộng hơn, trong ví dụ sau đây, ta xét công việc được chia thành ba công đoạn.

Ví dụ 4

Một đồng xu có hai mặt sấp và ngửa (kí hiệu S và N). Tung đồng xu ba lần liên tiếp và ghi lại kết quả. Tìm số kết quả có thể xảy ra, theo hai cách sau đây:

a) Vẽ sơ đồ hình cây.

b) Sử dụng quy tắc nhân.

Mặt sấp Mặt ngửa

Hình 6

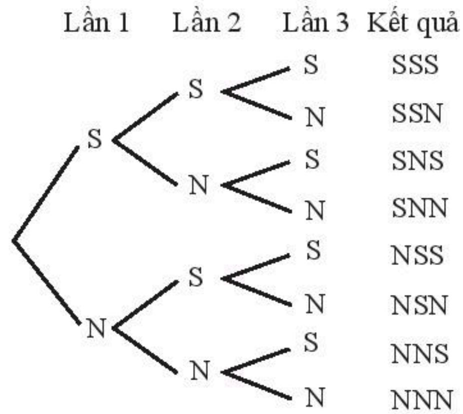
Giải

a) Vẽ sơ đồ hình cây như Hình 7.

Từ sơ đồ này, ta thấy có 8 kết quả có thể xảy ra.

b) Có thể coi việc tung đồng xu ba lần liên tiếp là một công việc gồm ba công đoạn, mỗi công đoạn tương ứng với một lần tung đồng xu. Mỗi lần tung có hai kết quả, là S hoặc N. Do đó, theo quy tắc nhân, số kết quả của việc tung đồng xu ba lần liên tiếp là:

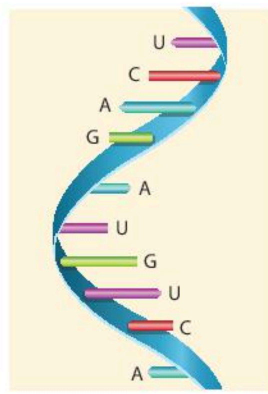
$$2\,.\,2\,.\,2 = 8 \text{ (kết quả).}$$



Hình 7

Ví dụ 5

Các phân tử RNA (acid ribonucleic) là một thành phần của tế bào sinh vật, có chức năng truyền đạt thông tin di truyền và những chức năng quan trọng khác. Mỗi phân tử RNA là một dãy các phân tử nucleotide thuộc một trong bốn loại là A (adenine), C (cytosine), G (guanine) và U (uracil). Hình 8 là hình ảnh mô phỏng một đoạn phân tử RNA. Số lượng và sự sắp xếp khác nhau của các phân tử nucleotide A, C, G hay U tạo nên các đoạn phân tử RNA khác nhau. Có nhiều nhất bao nhiêu đoạn phân tử RNA khác nhau cùng có 3 phân tử nucleotide?



Hình 8

Giải

Có thể coi việc tạo nên một đoạn phân tử RNA có 3 phân tử nucleotide là một công việc gồm 3 công đoạn, mỗi công đoạn ứng với việc chọn một trong bốn loại nucleotide A, C, G hoặc U cho mỗi vị trí (thứ nhất, thứ hai, thứ ba) của đoạn. Như vậy, mỗi công đoạn có 4 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, 3 công đoạn có số cách thực hiện là:

$$4\,.\,4\,.\,4 = 4^3.$$

Vậy có nhiều nhất 4^3 đoạn phân tử RNA khác nhau cùng có 3 phân tử nucleotide.

Ví dụ 6

Từ năm chữ số 0, 1, 2, 3, 4, có thể lập được bao nhiêu

a) số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau?

b) số tự nhiên chẵn có ba chữ số đôi một khác nhau?

Giải

Kí hiệu số cần lập là $\overline{abc}$, với a, b, c là ba chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số đã cho.

a) Có 4 cách lựa chọn chữ số a từ bốn chữ số khác 0 đã cho.

Ứng với mỗi cách chọn đó, có 4 cách chọn chữ số b từ bốn chữ số còn lại.

Ứng với mỗi cách chọn đó, có 3 cách chọn chữ số c từ ba chữ số còn lại.

Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, có 4 . 4 . 3 = 48 số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập được từ các chữ số đã cho.

b) Để số $\overline{abc}$ là số chẵn, chữ số c phải là chữ số chẵn. Ta xét hai trường hợp sau đây.

- *Trường hợp 1:* $c = 0$. Khi đó, có 4 cách chọn chữ số a từ bốn chữ số còn lại, và ứng với mỗi cách chọn đó, có 3 cách chọn chữ số b từ ba chữ số còn lại. Do đó, theo quy tắc nhân, trường hợp này có 4 . 3 = 12 số thoả mãn yêu cầu.
- *Trường hợp 2:* $c = 2$ hoặc $c = 4$. Khi đó, có hai cách chọn chữ số c từ hai chữ số 2 hoặc 4. Ứng với mỗi cách chọn đó, có 3 cách chọn chữ số a từ ba chữ số khác 0 còn lại, và ứng với mỗi cách chọn đó, có 3 cách chọn chữ số b từ các chữ số còn lại. Do đó, theo quy tắc nhân, trường hợp này có 2 . 3 . 3 = 18 số thoả mãn yêu cầu.

Trong hai trường hợp trên, mỗi số lập được theo trường hợp này đều khác với các số lập được của trường hợp kia. Theo quy tắc cộng, có 12 + 18 = 30 số tự nhiên chẵn có ba chữ số đôi một khác nhau lập được từ các chữ số đã cho.

2 Một mẫu xe ô tô có 4 màu ngoại thất là trắng, đen, cam và bạc. Mẫu xe này cũng có 2 màu nội thất là đen và xám.

a) Khách hàng có bao nhiêu lựa chọn về màu ngoại thất và nội thất khi mua một chiếc xe ô tô mẫu này?

b) Hãy vẽ sơ đồ hình cây để giải thích cho kết quả tính toán ở trên.

3 Có nhiều nhất bao nhiêu đoạn phân tử RNA khác nhau chứa 4 phân tử nucleotide, trong đó:

a) không có nucleotide A nào?

b) có nucleotide A nằm ở vị trí đầu tiên?

Trong phần khởi động đầu bài học này, nếu công ty có 2 500 nhân viên thì số mã số như vậy có đủ để cấp cho mỗi nhân viên một mã số riêng hay không?

BÀI TẬP

1. Một thùng chứa 6 quả dưa hấu, một thùng khác chứa 15 quả thanh long. Từ hai thùng này,

   a) có bao nhiêu cách chọn một quả dưa hấu hoặc thanh long?

   b) có bao nhiêu cách chọn một quả dưa hấu và một quả thanh long?

Hình 9

2. Tung đồng thời một đồng xu và một con xúc xắc, nhận được kết quả là mặt xuất hiện trên đồng xu (sấp hay ngửa) và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc.

   a) Tính số kết quả có thể xảy ra.

   b) Vẽ sơ đồ hình cây và liệt kê tất cả các kết quả đó.

Hình 10

3. Tại một nhà hàng chuyên phục vụ cơm trưa văn phòng, thực đơn có 5 món chính, 3 món phụ và 4 loại đồ uống. Tại đây, thực khách có bao nhiêu cách chọn bữa trưa gồm một món chính, một món phụ và một loại đồ uống?

4. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là chữ số chẵn, chữ số hàng đơn vị là chữ số lẻ?

5. An có thể đi từ nhà đến trường theo các con đường như Hình 11, trong đó có những con đường đi qua nhà sách.

Hình 11

a) An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường mà có đi qua nhà sách?

b) An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường?

Lưu ý: Chỉ tính những đường đi qua các điểm (nhà An, nhà sách, trường) không quá một lần.

Bài 2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Từ khoá: Hoán vị; Chỉnh hợp; Tổ hợp.

Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ?
Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 cầu thủ đó theo thứ tự để thực hiện loạt đá luân lưu? Bằng cách sử dụng quy tắc nhân, bạn có tìm được câu trả lời?
Học xong bài này, bạn hãy tìm cách nhanh hơn để trả lời các câu hỏi trên.

1. Hoán vị

1 Sau giờ thực hành trải nghiệm, ba đội A, B, C bốc thăm để xác định thứ tự trình bày, thuyết minh về sản phẩm của mỗi đội.

a) Hãy liệt kê tất cả các kết quả bốc thăm có thể xảy ra.

b) Có tất cả bao nhiêu kết quả như vậy? Ngoài cách đếm lần lượt từng kết quả, có cách tìm nào nhanh hơn không?

Mỗi cách sắp xếp ba đội A, B, C theo một thứ tự gọi là một ***hoán vị*** của ba đội này. Ta tính được số hoán vị của ba đội bằng $3 . 2 . 1 = 6$.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau đây:

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi cách sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự gọi là một ***hoán vị*** các phần tử đó (gọi tắt là hoán vị của A hay của n phần tử).

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử.

Người ta chứng minh được rằng:

Số các hoán vị của n phần tử ($n \geq 1$) bằng

$$P_n = n(n-1)(n-2)...2 . 1.$$

Chú ý:

• Ta đưa vào kí hiệu: $n! = n(n-1)(n-2)...2 . 1$ và đọc là *n giai thừa* hoặc *giai thừa của n*. Khi đó, $P_n = n!$.

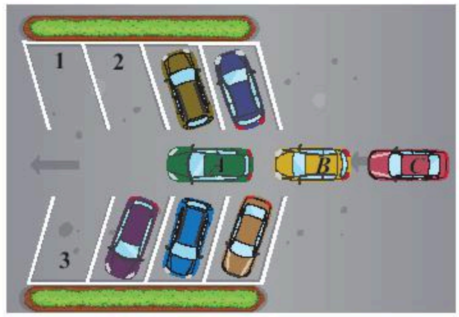
• Quy ước: $0! = 1$.

Ví dụ 1

Bãi đỗ xe ô tô còn lại ba chỗ trống như Hình 1. Có ba chiếc ô tô (kí hiệu A, B, C) đang đi vào bãi để đỗ xe.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp ba chiếc xe vào ba chỗ trống?

b) Vẽ sơ đồ hình cây về các cách sắp xếp và kiểm tra kết quả tính toán ở trên.



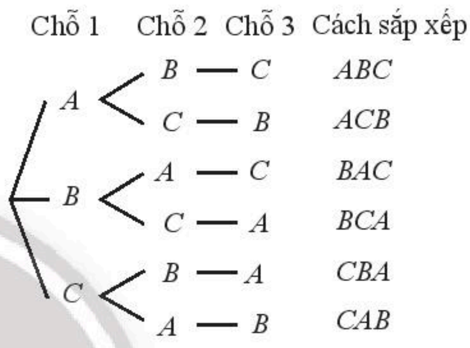
Hình 1

Giải

a) Mỗi cách sắp xếp ba chiếc xe vào ba chỗ trống là một hoán vị của ba chiếc xe. Do đó, số cách sắp xếp ba chiếc xe vào ba chỗ trống là

$$P_3 = 3.2.1 = 6 \text{ (cách)}.$$

b) Sơ đồ hình cây như Hình 2. Sơ đồ có ba cành lớn, mỗi cành lớn có hai cành vừa, mỗi cành vừa có một cành bé. Từ đó, số cành bé bằng $3.2.1 = 6$. Từ đó, số cách sắp xếp ba chiếc xe vào ba chỗ trống là 6 cách.



Hình 2

Ví dụ 2

Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5, lập các số có năm chữ số khác nhau.

a) Có thể lập được bao nhiêu số như vậy?

b) Trong số đó có bao nhiêu số chẵn?

Giải

a) Mỗi số tự nhiên có năm chữ số khác nhau được lập từ năm chữ số 1; 2; 3; 4; 5 là một hoán vị của năm chữ số này. Do đó, số số tự nhiên lập được là

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120 \text{ (số)}.$$

Biểu đồ thập phân để lập các số tự nhiên có 5 chữ số:

Chục nghìn	Nghìn	Trăm	Chục	Đơn vị

b) *Bước 1:* chọn chữ số hàng đơn vị là chữ số chẵn. Có 2 cách chọn (chọn 2 hoặc 4).

Bước 2: chọn bốn chữ số còn lại, có $P_4 = 4!$ cách chọn.

Từ đó, theo quy tắc nhân, số số tự nhiên chẵn có năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là

$$2.P_4 = 2.4! = 2.4.3.2.1 = 48 \text{ (số)}.$$

Một nhóm bạn gồm sáu thành viên cùng đi xem phim, đã mua sáu vé có ghế ngồi cùng dãy và kế tiếp nhau (như Hình 3). Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho các thành viên của nhóm?

Một giải bóng đá có 14 đội bóng tham gia. Có bao nhiêu khả năng về thứ hạng các đội bóng khi mùa giải kết thúc?

Hình 3

2. Chỉnh hợp

Tại một trạm quan sát, có sẵn 5 lá cờ màu đỏ, trắng, xanh, vàng và cam (kí hiệu Đ, T, X, V, C). Khi cần báo một tín hiệu, người ta chọn 3 lá cờ và cắm vào ba vị trí có sẵn thành một hàng (xem Hình 4).

a) Hãy chỉ ra ít nhất bốn cách chọn và cắm cờ để báo bốn tín hiệu khác nhau.

b) Bằng cách này, có thể báo nhiều nhất bao nhiêu tín hiệu khác nhau?

Hình 4

Trong 2, mỗi cách chọn ra 3 lá cờ từ 5 lá cờ và sắp xếp chúng theo thứ tự được gọi là một ***chỉnh hợp chập 3 của 5*** lá cờ. Ta thấy số các chỉnh hợp này bằng 5 . 4 . 3.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$) và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi cách lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một ***chỉnh hợp*** chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Người ta chứng minh được rằng:

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nhận xét: Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Ta có $P_n = A_n^n$, $n \geq 1$.

Ví dụ 3

Tính: a) A_5^3;　　b) A_7^4;　　c) A_5^2.

Giải

a) $A_5^3 = 5.4.3 = 60$;　　b) $A_7^4 = 7.6.5.4 = 840$;　　c) $A_5^2 = 5.4 = 20$.

Ví dụ 4

Phần thi chung kết nội dung chạy cự li 1 500 m của một giải đấu có 10 vận động viên tham gia. Có bao nhiêu khả năng về kết quả 3 vận động viên đoạt huy chương vàng, bạc và đồng sau khi phần thi kết thúc? Biết rằng không có hai vận động viên nào về đích cùng lúc.

Hình 5

Giải

Mỗi kết quả về 3 vận động viên đoạt huy chương vàng, bạc và đồng của nội dung thi đấu là một chỉnh hợp chập 3 của 10 vận động viên. Do đó, số kết quả có thể là

$$A_{10}^3 = 10.9.8 = 720.$$

2 Từ bảy chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, lập các số có ba chữ số khác nhau.

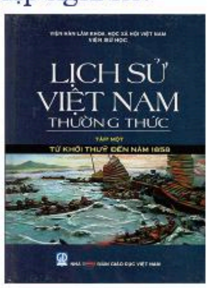
a) Có thể lập được bao nhiêu số như vậy?

b) Trong các số đó có bao nhiêu số lẻ?

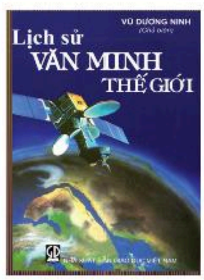
3. Tổ hợp

3 Lan vừa mua 4 cuốn sách, kí hiệu là A, B, C và D. Bạn ấy dự định chọn ra 3 cuốn để đưa về quê đọc trong dịp nghỉ hè.

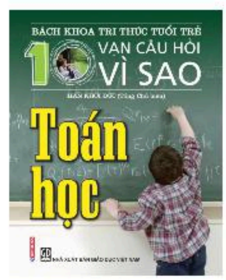
A



B

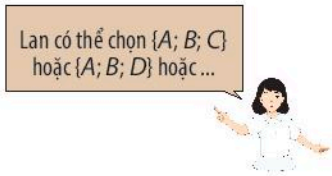


C



D

a) Hãy liệt kê tất cả các cách Lan có thể chọn 3 cuốn sách từ 4 cuốn sách. Có tất cả bao nhiêu cách?



b) Lan dự định đọc lần lượt từng cuốn. Lan có bao nhiêu cách xếp thứ tự 3 cuốn đã chọn?

c) Lan có bao nhiêu cách chọn 3 cuốn sách từ 4 cuốn sách và xếp theo thứ tự để đọc lần lượt từng cuốn một?

Mỗi cách chọn 3 cuốn sách từ 4 cuốn sách A, B, C, D được gọi là một ***tổ hợp chập 3 của 4 phần tử*** A, B, C, D.

Ta biết rằng, với mỗi cách chọn 3 cuốn sách (chẳng hạn A, B, C) thì có $P_3 = 3!$ cách xếp chúng theo thứ tự. Mỗi thứ tự này chính là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử A, B, C, D. Do đó, nếu kí hiệu C_4^3 là số tổ hợp chập 3 của 4 phần tử thì ta có hệ thức $C_4^3 \,.\, 3! = A_4^3$ hay $C_4^3 = \dfrac{A_4^3}{3!}$.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau đây:

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi tập con gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) của A được gọi là một ***tổ hợp*** chập k của n phần tử.

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$).

Người ta chứng minh được rằng:

Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

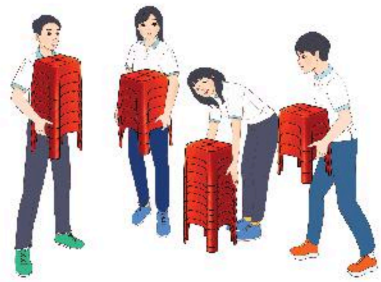
Chú ý: Người ta quy ước $C_n^0 = 1$.

Ví dụ 5

Tổ Một có 9 thành viên. Tuần tới là phiên trực nhật của tổ, nên cần phân công 4 bạn đi bê ghế của lớp cho buổi chào cờ.

a) Tổ có bao nhiêu cách phân công 4 bạn đi bê ghế?

b) Tổ có bao nhiêu cách chọn 5 bạn không phải đi bê ghế?



Hình 6

Giải

a) Mỗi cách phân công 4 bạn từ 9 bạn là một tổ hợp chập 4 của 9 bạn. Do đó, số cách phân công 4 bạn của tổ đi bê ghế là

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2} = 126 \text{ (cách).}$$

b) Tương tự, số cách chọn 5 bạn từ 9 bạn không phải đi bê ghế là

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126 \text{ (cách).}$$

Nhận xét: Ở Ví dụ 5, ta thấy $C_9^4 = C_9^5$. Tổng quát, ta có hệ thức

$$C_n^k = C_n^{n-k} \ (0 \le k \le n).$$

Học sinh có thể tự kiểm tra hệ thức này.

3 Tính: a) C_7^2; b) $C_9^0 + C_9^9$; c) $C_{15}^3 - C_{14}^3$.

4 Nội dung thi đấu đôi nam nữ của giải bóng bàn cấp trường có 7 đội tham gia. Các đội thi đấu vòng tròn một lượt.

a) Nội dung này có tất cả bao nhiêu trận đấu?

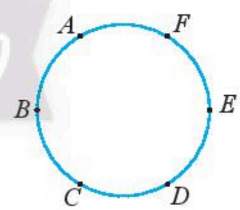
b) Sau giải đấu, ba đội có thành tích tốt nhất sẽ được chọn đi thi đấu cấp liên trường. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra về ba đội được chọn đi thi đấu cấp liên trường?

Hình 7

2 Cho 6 điểm cùng nằm trên một đường tròn như Hình 8.

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng có điểm đầu mút thuộc các điểm đã cho?

b) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh thuộc các điểm đã cho?



Hình 8

4. Tính số các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp bằng máy tính cầm tay

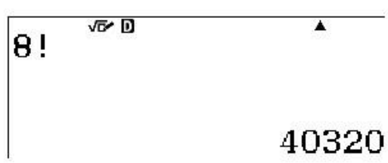
Với một số máy tính cầm tay, ta có thể tính toán nhanh số các hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Ví dụ 6

a) Để tính $P_8 = 8!$, ta ấn liên tiếp các phím

8 SHIFT x^{-1} $(x!)$ =

thì nhận được kết quả là 40 320.



b) Để tính A_{12}^{5}, ta ấn liên tiếp các phím

1 2 SHIFT × (nPr) 5 =

thì nhận được kết quả là 95040.

12P5

95040

c) Để tính C_{20}^{11}, ta ấn liên tiếp các phím

2 0 SHIFT ÷ (nCr) 1 1 =

thì nhận được kết quả là 167960.

20C11

167960

5 Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau:

a) A_{15}^{10}; b) $C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{11}^{8}$; c) $C_{5}^{1}C_{20}^{2}+C_{5}^{2}C_{20}^{1}$.

BÀI TẬP

1. Cần xếp một nhóm 5 học sinh ngồi vào một dãy 5 chiếc ghế.

a) Có bao nhiêu cách xếp?

b) Nếu bạn Nga (một thành viên trong nhóm) nhất định muốn ngồi vào chiếc ghế ngoài cùng bên trái, thì có bao nhiêu cách xếp?

Hình 9

2. Từ các chữ số sau đây, có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau?

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6. b) 0; 1; 2; 3; 4; 5.

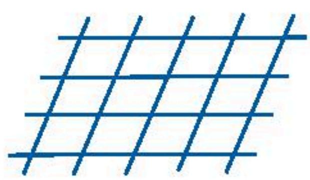
3. Tổ Một có 4 bạn nam và 5 bạn nữ. Có bao nhiêu cách cử 3 bạn của tổ làm trực nhật trong mỗi trường hợp sau?

a) 3 bạn được chọn bất kì; b) 3 bạn gồm 2 nam và 1 nữ.

4. Từ một danh sách gồm 8 người, người ta bầu ra một ủy ban gồm một chủ tịch, một phó chủ tịch, một thư kí và một ủy viên. Có bao nhiêu khả năng có thể về kết quả bầu ủy ban này?

5. Một nhóm gồm 7 bạn đến trung tâm chăm sóc người cao tuổi làm từ thiện. Theo chỉ dẫn của trung tâm, 3 bạn hỗ trợ đi lại, 2 bạn hỗ trợ tắm rửa và 2 bạn hỗ trợ ăn uống. Có bao nhiêu cách phân công các bạn trong nhóm làm các công việc trên?

6. Có 4 đường thẳng song song cắt 5 đường thẳng song song khác tạo thành những hình bình hành (như Hình 10). Có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành?



Hình 10

7. Mùa giải 2019, giải bóng đá vô địch quốc gia (V.League) có 14 đội bóng tham gia. Các đội bóng đấu vòng tròn hai lượt đi và về. Hỏi cả giải đấu có bao nhiêu trận đấu?

Bài 3. Nhị thức Newton

Từ khoá: Nhị thức Newton; Khai triển.

Ở Trung học cơ sở, ta đã quen thuộc với các công thức khai triển:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Với số tự nhiên $n > 3$ thì công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ sẽ như thế nào?

a) Xét công thức khai triển $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

i) Liệt kê các số hạng của khai triển trên.

ii) Liệt kê các hệ số của khai triển trên.

iii) Tính giá trị của C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3 (có thể sử dụng máy tính) rồi so sánh với các hệ số trên. Có nhận xét gì?

b) Hoàn thành biến đổi sau đây để tìm công thức khai triển của $(a+b)^4$:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\,a^4 + \boxed{\quad}\,a^3b + \boxed{\quad}\,a^2b^2 + \boxed{\quad}\,ab^3 + \boxed{\quad}\,b^4.$$

Tính giá trị của C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4, rồi so sánh với các hệ số của khai triển trên.

Từ đó, hãy sử dụng các kí hiệu C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 để viết lại công thức khai triển trên.

c) Từ kết quả của câu a) và b), hãy dự đoán công thức khai triển của $(a+b)^5$. Tính toán để kiểm tra dự đoán đó.

Từ hoạt động trên, ta nhận được hai công thức khai triển:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

Hai công thức trên gọi là ***công thức nhị thức Newton*** (gọi tắt là ***nhị thức Newton***) $(a+b)^n$ ứng với $n = 4$ và $n = 5$.

Chú ý: Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n$ với $n = 0; 1; 2; 3; \ldots$ được viết thành từng hàng và xếp thành bảng số như bên. Bảng số này có quy luật: số đầu tiên và số cuối cùng của mỗi hàng đều là 1; tổng của hai số liên tiếp cùng hàng bằng số của hàng kế dưới ở vị trí giữa hai số đó (được chỉ bởi mũi tên trên bảng).

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
...	... ...

Bảng số trên được gọi là ***tam giác Pascal*** (đặt theo tên của nhà toán học, vật lí học, triết học người Pháp Blaise Pascal, 1623 – 1662).

Ví dụ 1

Sử dụng công thức nhị thức Newton, hãy khai triển các biểu thức sau:

a) $(x + 3)^4$; b) $(1 - x)^5$.

Giải

a) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= 1.x^4 + 4.x^3.3 + 6.x^2.3^2 + 4.x.3^3 + 1.3^4\\ &= x^4 + 4.3.x^3 + 6.9.x^2 + 4.27.x + 81\\ &= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.\end{aligned}$$

b) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(1-x)^5 &= 1 + 5.(-x) + 10.(-x)^2 + 10.(-x)^3 + 5.(-x)^4 + 1.(-x)^5\\ &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5.\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Khai triển và rút gọn biểu thức: $\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 = 1 + 5.\sqrt{2} + 10.\left(\sqrt{2}\right)^2 + 10.\left(\sqrt{2}\right)^3 + 5.\left(\sqrt{2}\right)^4 + 1.\left(\sqrt{2}\right)^5;$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^5 = 1 + 5.\left(-\sqrt{2}\right) + 10.\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 10.\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 5.\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 1.\left(-\sqrt{2}\right)^5.$$

Từ đó,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5 = 2\left[1 + 10.\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5.\left(\sqrt{2}\right)^4\right] = 2(1 + 10.2 + 5.4) = 82.$$

Ví dụ 3

Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$. Tập hợp A có bao nhiêu tập hợp con?

Giải

Tập hợp A có 5 phần tử. Mỗi tập con của A có k ($1 \le k \le 5$) phần tử là một tổ hợp chập k của A. Do đó, số tập con như vậy bằng C_5^k. Mặt khác, có một tập con của A không có phần tử nào (tập rỗng), tức có $C_5^0 = 1$ tập con như vậy. Do đó, số tập con của A bằng

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5.$$

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 = 2^5.$$

Vậy A có $2^5 = 32$ tập con.

1 Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2)^4$; b) $(x+2y)^5$.

2 Sử dụng công thức nhị thức Newton, chứng tỏ rằng:

a) $C_4^0 + 2C_4^1 + 2^2C_4^2 + 2^3C_4^3 + 2^4C_4^4 = 81$;

b) $C_4^0 - 2C_4^1 + 2^2C_4^2 - 2^3C_4^3 + 2^4C_4^4 = 1$.

Trên quầy còn 4 vé xổ số khác nhau. Một khách hàng có bao nhiêu lựa chọn mua một số vé trong số các vé xổ số đó? Tính cả trường hợp mua không vé, tức là không mua vé nào.

BÀI TẬP

1. Sử dụng công thức nhị thức Newton, khai triển các biểu thức sau:

a) $(3x+y)^4$; b) $\left(x-\sqrt{2}\right)^5$.

2. Khai triển và rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(2+\sqrt{2}\right)^4$; b) $\left(2+\sqrt{2}\right)^4 + \left(2-\sqrt{2}\right)^4$; c) $\left(1-\sqrt{3}\right)^5$.

3. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3x-2)^5$.

4. Cho $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$ là một tập hợp có 5 phần tử. Chứng minh rằng số tập hợp con có số lẻ (1, 3, 5) phần tử của A bằng số tập hợp con có số chẵn (0, 2, 4) phần tử của A.

5. Chứng minh rằng $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5 = 0$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

1. Một nhóm tình nguyện viên gồm 4 học sinh lớp 10A, 5 học sinh lớp 10B và 6 học sinh lớp 10C. Để tham gia một công việc tình nguyện, nhóm có bao nhiêu cách cử ra

a) 1 thành viên của nhóm?

b) 3 thành viên của nhóm đang học ở ba lớp khác nhau?

c) 2 thành viên của nhóm đang học ở hai lớp khác nhau?

2. Một khoá số có 3 vòng số (mỗi vòng gồm 10 số, từ 0 đến 9) như Hình 1. Người dùng cần đặt mật mã cho khoá là một dãy số có 3 chữ số. Để mở khoá, cần xoay các vòng số để dãy số phía trước khóa trùng với mật mã đã chọn. Có bao nhiêu cách chọn mật mã cho khoá?

Hình 1

3. Từ 6 thẻ số như Hình 2, có thể ghép để tạo thành bao nhiêu

Hình 2

a) số tự nhiên có 6 chữ số?

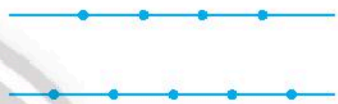
b) số tự nhiên lẻ có 6 chữ số?

c) số tự nhiên có 5 chữ số?

d) số tự nhiên có 5 chữ số lớn hơn 50 000?

4. Thực đơn tại một quán cơm văn phòng có 6 món mặn, 5 món rau và 3 món canh. Tại đây, một nhóm khách muốn chọn bữa trưa gồm cơm, 2 món mặn, 2 món rau và 1 món canh. Nhóm khách có bao nhiêu cách chọn?

5. Cho 9 điểm nằm trên hai đường thẳng song song như Hình 3. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba điểm trong các điểm đã cho?



Hình 3

6. Khai triển các biểu thức:

a) $\left(a-\frac{b}{2}\right)^4$; b) $(2x^2+1)^5$.

7. Hãy khai triển và rút gọn biểu thức

$$(1+x)^4+(1-x)^4.$$

Sử dụng kết quả đó để tính gần đúng giá trị biểu thức $1{,}05^4+0{,}95^4$.

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IX PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Trong chương IX, chúng ta sẽ tìm hiểu về toạ độ của vectơ, thiết lập biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ và dùng phương pháp toạ độ để viết phương trình đường thẳng, đường tròn. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về ba đường conic là elip, hypebol, parabol và phương trình chính tắc của chúng trong mặt phẳng toạ độ. Vận dụng hình học toạ độ, chúng ta sẽ giải quyết được một số vấn đề trong thực tiễn.

Hình học toạ độ giúp công việc vẽ bản đồ chính xác và thuận tiện.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Tìm được toạ độ của một vectơ, độ dài của một vectơ bằng phương pháp toạ độ.

– Thiết lập được phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng. Nhận biết được vị trí tương đối của hai đường thẳng, tính được góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng bằng phương pháp toạ độ.

– Thiết lập được phương trình đường tròn; xác định được tâm và bán kính đường tròn khi biết phương trình của đường tròn. Thiết lập được phương trình tiếp tuyến của đường tròn khi biết toạ độ của tiếp điểm.

– Nhận biết được ba đường conic bằng hình học và phương trình chính tắc của ba đường conic trong mặt phẳng toạ độ.

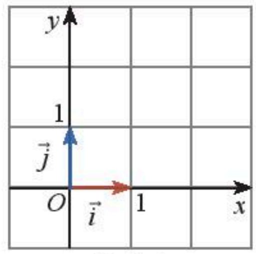
– Vận dụng được phương pháp toạ độ để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. Toạ độ của vectơ

Từ khoá: Trục toạ độ; Hệ trục toạ độ; Mặt phẳng toạ độ; Toạ độ của một vectơ; Toạ độ của một điểm; Biểu thức toạ độ của phép toán vectơ.

Hãy tìm cách xác định vị trí các quân mã trên bàn cờ vua.

1. Toạ độ của vectơ đối với một hệ trục toạ độ



Hình 1

1 Hãy nêu nhận xét về độ lớn, phương và chiều của vectơ $\vec{i}$ trên trục Ox và vectơ $\vec{j}$ trên trục Oy (Hình 1).

Trục toạ độ

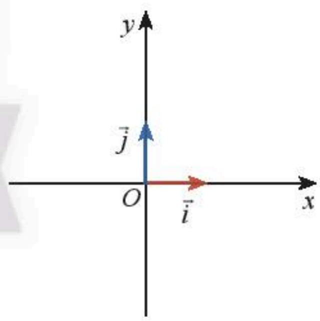
Trục toạ độ (gọi tắt là ***trục***) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O (gọi là ***điểm gốc***) và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị của trục.

Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{e})$.

Hình 2

Hệ trục toạ độ

Hệ trục toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là ***gốc toạ độ***. Trục $(O; \vec{i})$ được gọi là ***trục hoành*** và kí hiệu là Ox, trục $(O; \vec{j})$ được gọi là ***trục tung*** và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy. Hệ trục toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy.

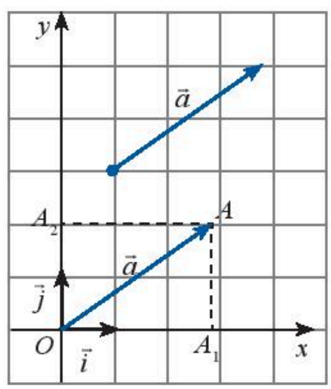


Hình 3

Chú ý: Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục toạ độ Oxy được gọi là *mặt phẳng toạ độ Oxy*, hay gọi tắt là *mặt phẳng Oxy*.

Toạ độ của một vectơ

2 Trong mặt phẳng Oxy, cho một vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Ox và Oy (Hình 4). Đặt $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Biểu diễn vectơ $\vec{a}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.



Hình 4

Trong mặt phẳng Oxy, cặp số $(x; y)$ trong biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ được gọi là ***toạ độ của vectơ*** $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x;\ y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của vectơ $\vec{a}$.

Chú ý:

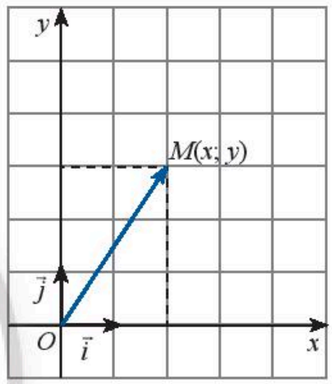
• $\vec{a} = (x;\ y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Nếu cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$

Toạ độ của một điểm

3 Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M. Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho một điểm M tuỳ ý. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***toạ độ của điểm*** M.



Hình 5

Nhận xét:

• Nếu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ thì cặp số $(x; y)$ là toạ độ của điểm M, kí hiệu $M(x; y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của điểm M.

• $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

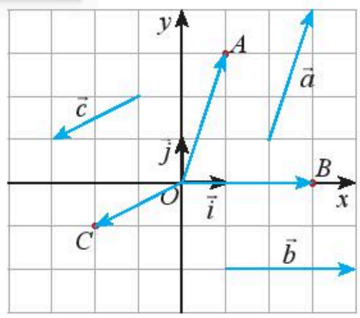
Chú ý: Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M. Khi đó ta viết $M(x_M; y_M)$.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm A, B, C được biểu diễn như Hình 6.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và các điểm A, B, C.



Hình 6

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - \vec{j}$.

b) Từ kết quả trên, suy ra: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1;3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (3;0)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = (-2;-1)$.

Do đó $A(1; 3)$, $B(3; 0)$, $C(-2; -1)$.

Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $D(-1; 4)$, $E(0; -3)$, $F(5; 0)$.

a) Vẽ các điểm D, E, F trên mặt phẳng Oxy.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$.

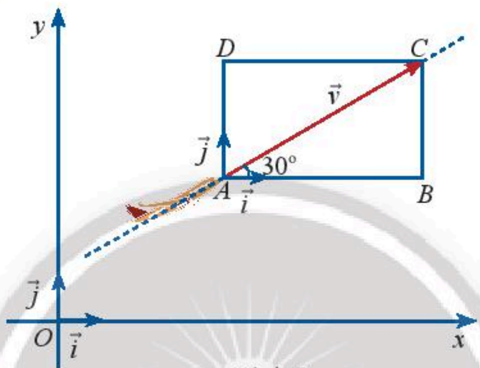
c) Vẽ và tìm toạ độ hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ lần lượt trên hai trục toạ độ Ox và Oy.

Một máy bay đang cất cánh với tốc độ 240 km/h theo phương hợp với phương nằm ngang một góc 30° (Hình 7).

a) Tính độ dài mỗi cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.

b) Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

c) Tìm toạ độ của $\vec{v}$.



Hình 7

2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và số thực k. Ta đã biết có thể biểu diễn từng vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ như sau: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$; $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$.

a) Biểu diễn từng vectơ: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k\vec{a}$ theo hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.

b) Tìm $\vec{a}.\vec{b}$ theo toạ độ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và số thực k. Khi đó:

1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$;

2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$;

3) $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$;

4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Ví dụ 2

Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 5)$, $\vec{b} = (4; -2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{a}$, $-5\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $(3\vec{a}).(-\vec{b})$.

Giải

a) Ta có:

$\vec{a}+\vec{b} = (1 + 4; 5 + (-2)) = (5; 3)$; $\quad \vec{a}-\vec{b} = (1 - 4; 5 - (-2)) = (-3; 7)$;

$3\vec{a} = (3 . 1; 3 . 5) = (3; 15)$; $\quad -5\vec{b} = (-5 . 4; -5 . (-2)) = (-20; 10)$.

b) Ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = 1 . 4 + 5 . (-2) = 4 - 10 = -6$;

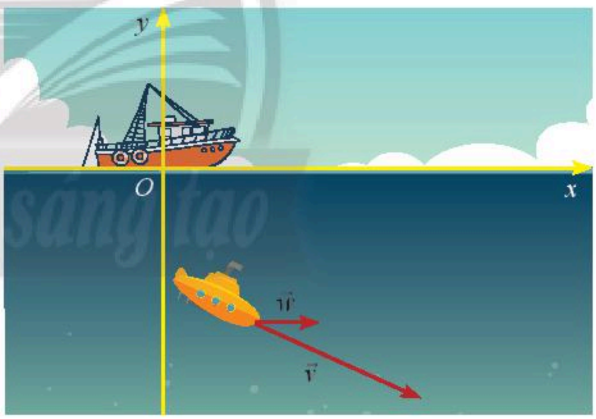
$3\vec{a} = (3; 15)$ và $-\vec{b} = (-4; 2)$ nên $(3\vec{a}).(-\vec{b}) = 3 . (-4) + 15 . 2 = -12 + 30 = 18$.

Cho hai vectơ $\vec{m} = (-6; 1)$, $\vec{n} = (0; 2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}-\vec{n}$, $10\vec{m}$, $-4\vec{n}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{m}.\vec{n}$, $(10\vec{m}).(-4\vec{n})$.

Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10; -8)$ (Hình 8). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu vùng biển là $\vec{w} = (3,5; 0)$. Tìm toạ độ của vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.



Hình 8

3. Áp dụng của toạ độ vectơ

Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Từ biểu thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo toạ độ hai điểm A, B.

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Ví dụ 3

Cho $M(1; 2)$, $N(-3; 4)$, $P(5; 0)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{NP}$.

Giải

$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M) = (-3 - 1; 4 - 2) = (-4; 2)$;

$\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P; y_M - y_P) = (1 - 5; 2 - 0) = (-4; 2)$;

$\overrightarrow{NP} = (x_P - x_N; y_P - y_N) = (5 + 3; 0 - 4) = (8; -4)$.

3 Cho $E(9; 9)$, $F(8; -7)$, $G(0; -6)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EG}$.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

6 Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có toạ độ ba đỉnh là $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

c) Từ các kết quả trên, tìm toạ độ điểm M và G theo toạ độ của các điểm A, B, C.

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Toạ độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Toạ độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 4

Cho tam giác MNP có toạ độ các đỉnh là $M(2; 2)$, $N(6; 3)$ và $P(5; 5)$.

a) Tìm toạ độ trung điểm E của cạnh MN.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác MNP.

Giải

a) Ta có: $x_E = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$, $y_E = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$. Vậy $E\left(4; \frac{5}{2}\right)$.

b) Ta có: $x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{2+6+5}{3} = \frac{13}{3}$, $y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = \frac{2+3+5}{3} = \frac{10}{3}$.

Vậy $G\left(\frac{13}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

4 Cho tam giác QRS có toạ độ các đỉnh là $Q(7; -2)$, $R(-4; 9)$ và $S(5; 8)$.

a) Tìm toạ độ trung điểm M của cạnh QS.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác QRS.

Ứng dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

7 Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Hoàn thành các phép biến đổi sau:

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = .?.$;

b) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = tb_1 \\ a_2 = tb_2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \end{cases} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = .?.$;

c) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2} = \sqrt{.?.}$;

d) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2} = \sqrt{.?.}$;

e) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{.?.}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(1; 1)$, $B(5; 2)$ và $C(4; 4)$.

a) Tìm toạ độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

b) Giải tam giác ABC.

Giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y - 1)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 5; y - 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x; y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, nên ta có:

- $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x - 1).(-1) + (y - 1).2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 1 = 0$. (1)

• Hai vectơ $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow (x-5).2-(y-2).(-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-12=0$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x+2y-1=0 \\ 2x+y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{5} \\ y=\dfrac{14}{5}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{23}{5};\dfrac{14}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;3)$.

Suy ra: $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

$$\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{4.3+1.3}{\sqrt{17}.3\sqrt{2}}\approx 0,857 \Rightarrow \widehat{A}\approx 30°57'.$$

$$\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}=\frac{(-4).(-1)+(-1).2}{\sqrt{17}.\sqrt{5}}\approx 0,217 \Rightarrow \widehat{B}\approx 77°28'.$$

$$\widehat{C}=180°-\widehat{A}-\widehat{B}\approx 180°-30°57'-77°28'=71°35'.$$

5 Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác DEF có toạ độ các đỉnh là $D(2;2)$, $E(6;2)$ và $F(2;6)$.

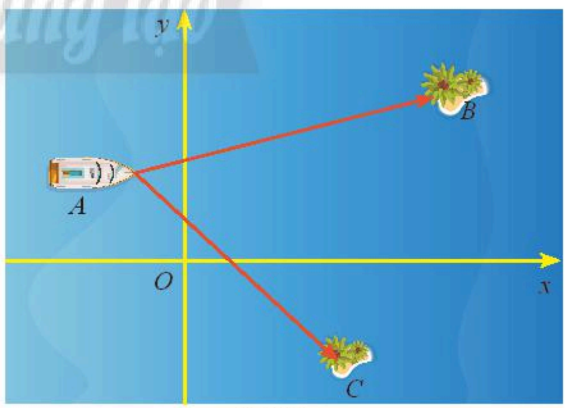
a) Tìm toạ độ điểm H là chân đường cao của tam giác DEF kẻ từ D.

b) Giải tam giác DEF.

3 Một trò chơi trên máy tính đang mô phỏng một vùng biển có hai hòn đảo nhỏ có toạ độ $B(50;30)$ và $C(32;-23)$. Một con tàu đang neo đậu tại điểm $A(-10;20)$.

a) Tính số đo của $\widehat{BAC}$.

b) Cho biết một đơn vị trên hệ trục toạ độ tương ứng với 1 km. Tính khoảng cách từ con tàu đến mỗi hòn đảo.



Hình 9

BÀI TẬP

1. Trên trục $(O;\vec{e})$ cho các điểm A, B, C, D có toạ độ lần lượt là $4; -1; -5; 0$.

a) Vẽ trục và biểu diễn các điểm đã cho lên trên trục đó.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng hay ngược hướng?

Các bài toán sau đây được xét trong mặt phẳng Oxy.

2. Chứng minh rằng:

a) $\vec{a} = (4; -6)$ và $\vec{b} = (-2; 3)$ là hai vectơ ngược hướng.

b) $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (-8; 12)$ là hai vectơ cùng hướng.

c) $\vec{a} = (0; 4)$ và $\vec{b} = (0; -4)$ là hai vectơ đối nhau.

3. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$; b) $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$; c) $\vec{c} = 4\vec{i}$; d) $\vec{d} = -9\vec{j}$.

4. Cho bốn điểm $A(3; 5)$, $B(4; 0)$, $C(0; -3)$, $D(2; 2)$. Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

a) Thuộc trục hoành; b) Thuộc trục tung;

c) Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

5. Cho điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm toạ độ:

a) Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox;

b) Điểm M' đối xứng với M qua trục Ox;

c) Điểm K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy;

d) Điểm M'' đối xứng với M qua trục Oy;

e) Điểm C đối xứng với M qua gốc toạ độ.

6. Cho ba điểm $A(2; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 5)$.

a) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.

b) Tìm toạ độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

c) Giải tam giác ABC.

7. Cho tam giác ABC có các điểm $M(2; 2)$, $N(3; 4)$, $P(5; 3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA.

a) Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác ABC và MNP trùng nhau.

c) Giải tam giác ABC.

8. Cho hai điểm $A(1; 3)$, $B(4; 2)$.

a) Tìm toạ độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho $DA = DB$.

b) Tính chu vi tam giác OAB.

c) Chứng minh rằng OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

9. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$; b) $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$;

c) $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3; \sqrt{3})$.

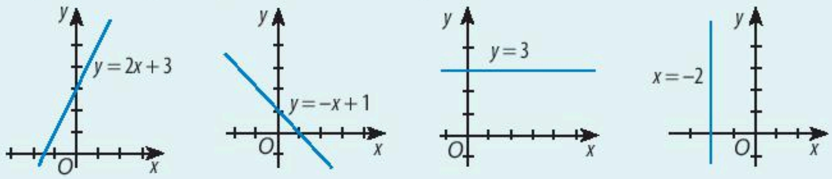
10. Cho bốn điểm $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$, $D(0; -2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

11. Một máy bay đang hạ cánh với vận tốc $\vec{v} = (-210; -42)$. Cho biết vận tốc của gió là $\vec{w} = (-12; -4)$ và một đơn vị trên hệ trục toạ độ tương ứng với 1 km. Tìm độ dài vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

Bài 2. Đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ

Từ khoá: Vectơ pháp tuyến; Vectơ chỉ phương; Hệ số góc; Phương trình tham số; Phương trình tổng quát; Góc giữa hai đường thẳng.

Tìm các giá trị của tham số a, b, c để phương trình $ax + by + c = 0$ có thể biểu diễn được các đường thẳng trong hình dưới đây.



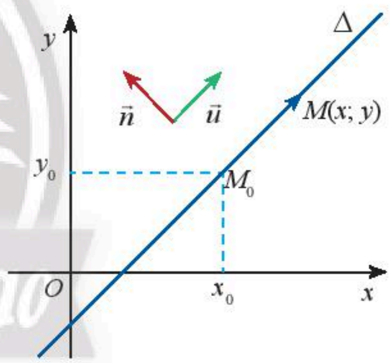
1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

1 Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và cho hai vectơ $\vec{n} = (a; b)$ và $\vec{u} = (b; -a)$ khác vectơ-không. Cho biết $\vec{u}$ có giá song song hoặc trùng với Δ.

a) Tính tích vô hướng $\vec{n}.\vec{u}$ và nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{n}$, $\vec{u}$.

b) Gọi $M(x; y)$ là điểm di động trên Δ. Chứng tỏ rằng vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ luôn cùng phương với vectơ $\vec{u}$ và luôn vuông góc với vectơ $\vec{n}$.



Hình 1

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

Chú ý:

- Nếu đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ thì Δ sẽ nhận $\vec{u} = (b; -a)$ hoặc $\vec{u} = (-b; a)$ là một vectơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.
- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của Δ.

Ví dụ 1

Cho đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. Tìm vectơ chỉ phương của Δ.

Giải

Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, suy ra Δ cũng có vectơ pháp tuyến $2\vec{n} = (1; -5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng

2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2)$ làm vectơ chỉ phương. Với mỗi điểm $M(x; y)$ thuộc Δ, tìm toạ độ của M theo toạ độ của M_0 và $\vec{u}$.

Trong mặt phẳng Oxy, ta gọi:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (\text{với } u_1^2 + u_2^2 > 0,\ t \in \mathbb{R})$$

là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Chú ý: Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ và ngược lại.

Ví dụ 2

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 7)$ và nhận $\vec{u} = (-3; 5)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Tìm toạ độ điểm M trên Δ, biết M có hoành độ bằng -4.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 7 + 5t. \end{cases}$

b) Thay $x = -4$ vào phương trình $x = 2 - 3t$, ta được $-4 = 2 - 3t$, suy ra $t = 2$.

Thay $t = 2$ vào phương trình $y = 7 + 5t$, ta được $y = 17$.

Vậy $M = (-4; 17)$.

1. a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $B(-9; 5)$ và nhận $\vec{v} = (8; -4)$ làm vectơ chỉ phương.

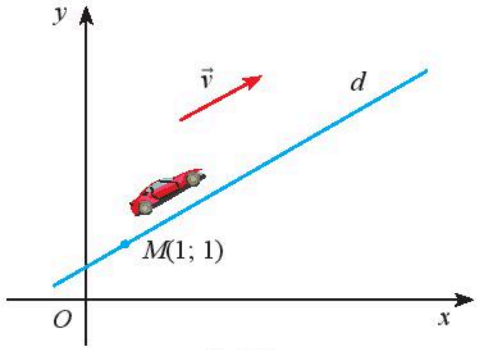
b) Tìm toạ độ điểm P trên Δ, biết P có tung độ bằng 1.

1

Một trò chơi đua xe ô tô vượt sa mạc trên máy tính đã xác định trước một hệ trục toạ độ Oxy. Cho biết một ô tô chuyển động thẳng đều từ điểm $M(1; 1)$ với vectơ vận tốc $\vec{v} = (40; 30)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d biểu diễn đường đi của ô tô.

b) Tìm toạ độ của xe ứng với $t = 2$; $t = 4$.



Hình 2

Phương trình tổng quát của đường thẳng

3

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b)$ làm vectơ pháp tuyến. Với mỗi điểm $M(x; y)$ thuộc Δ, chứng tỏ rằng điểm $M(x; y)$ có toạ độ thoả mãn phương trình:

$$ax + by + c = 0 \text{ (với } c = -ax_0 - by_0\text{)}.$$

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng

$$ax + by + c = 0$$

với a và b không đồng thời bằng 0.

Chú ý:

• Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$.

• Khi cho phương trình đường thẳng $ax + by + c = 0$, ta hiểu a và b không đồng thời bằng 0.

Ví dụ 3

Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 2)$;

b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(3; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2)$;

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(1; 1)$, $D(3; 5)$.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 2)$, nên ta có phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 2)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -3)$.
Phương trình tổng quát của d là: $2(x - 2) - 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$.

b) Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 5)$.
Phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 5t. \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của d là: $5(x - 3) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 9 = 0$.

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(1; 1)$, $D(3; 5)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (2; 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -2)$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t. \end{cases}$

Phương trình tổng quát của d là:

$$4(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

Nhận xét:

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ có dạng:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \text{ (với } x_B \neq x_A, y_B \neq y_A).$$

• Nếu đường thẳng Δ cắt trục Ox và Oy tại $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ (a, b khác 0) thì phương trình Δ có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1)$$

Phương trình (1) còn được gọi là *phương trình đoạn chắn*.

2 Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$;

b) Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -7)$;

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $M(4; 0)$, $N(0; 3)$.

2 Một người đang lập trình một trò chơi trên máy tính. Trên màn hình máy tính đã xác định trước một hệ trục toạ độ Oxy. Người đó viết lệnh để một điểm $M(x; y)$ từ vị trí $A(1; 2)$ chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc $\vec{v} = (3; -4)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biểu diễn đường đi của điểm M.

b) Tìm toạ độ của điểm M khi Δ cắt trục hoành.

Liên hệ giữa đồ thị hàm số bậc nhất và đường thẳng

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = kx + y_0$ ($k \neq 0$) là một đường thẳng d đi qua điểm $M(0; y_0)$ và có hệ số góc k. Ta có thể viết: $y = kx + y_0 \Leftrightarrow kx - y + y_0 = 0$.

Như vậy, đồ thị hàm bậc nhất $y = kx + y_0$ là một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (k; -1)$ và có phương trình tổng quát là $kx - y + y_0 = 0$. Đường thẳng này không vuông góc với Ox và Oy.

Ngược lại, cho đường thẳng d có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ với a và b đều khác 0, khi đó ta có thể viết: $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow y = kx + y_0$.

Như vậy d là đồ thị của hàm bậc nhất $y = kx + y_0$ với hệ số góc $k = -\dfrac{a}{b}$ và tung độ gốc $y_0 = -\dfrac{c}{b}$.

Chú ý:

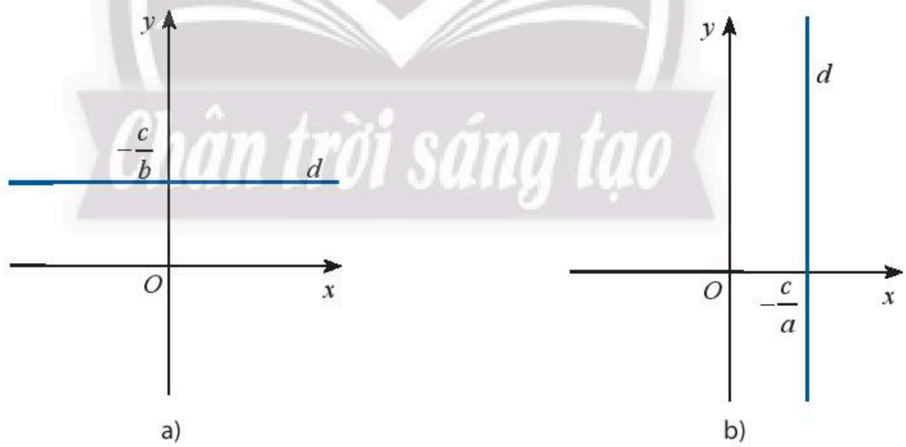
• Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ trở thành $y = -\dfrac{c}{b}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm $\left(0; -\dfrac{c}{b}\right)$ (Hình 3a).

• Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ trở thành $x = -\dfrac{c}{a}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm $\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$ (Hình 3b).

Trong cả hai trường hợp này, đường thẳng d không phải là đồ thị của hàm số bậc nhất.



Hình 3

Ví dụ 4

Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng là đồ thị các hàm số bậc nhất sau:

a) d_1: $y = 2x + 3$;   b) d_2: $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$;   c) d_3: $y = x$.

Giải

a) Ta có $y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_1 là: $2x - y + 3 = 0$.

b) Ta có $y=-\dfrac{1}{2}x+5 \Leftrightarrow x+2y-10=0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_2 là: $x+2y-10=0$.

c) Ta có $y=x \Leftrightarrow x-y=0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_3 là: $x-y=0$.

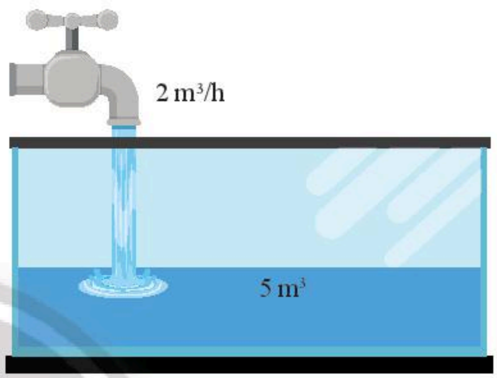
3 Tìm các hàm số bậc nhất có đồ thị là các đường thẳng trong 2.

3 Một người bắt đầu mở một vòi nước. Nước từ vòi chảy với tốc độ là 2 m³/h vào một cái bể đã chứa sẵn 5 m³ nước.

a) Viết biểu thức tính thể tích y của nước có trong bể sau x giờ.

b) Gọi $y=f(x)$ là hàm số xác định được từ câu a). Vẽ đồ thị d của hàm số này.

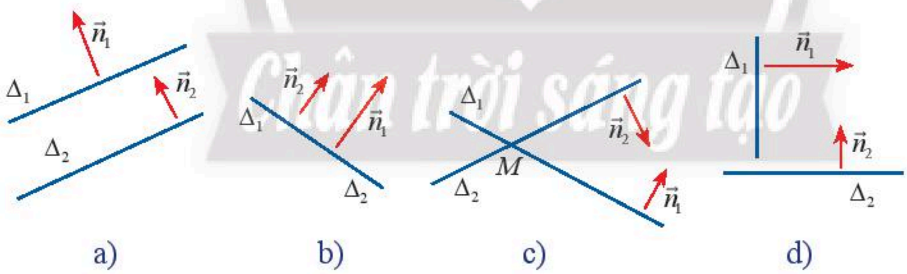
c) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d.



Hình 4

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

4 Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$.



Hình 5

Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp sau:

a) $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương (Hình 5a, b);

b) $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương (Hình 5c, d);

c) $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ vuông góc (Hình 5d).

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ $(a_1^2+b_1^2>0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$ và đường thẳng Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ $(a_2^2+b_2^2>0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.

Ta có thể dùng phương pháp toạ độ để xét vị trí tương đối giữa Δ_1 và Δ_2 như sau:

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tuỳ ý trên Δ_1.

- Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.
- Nếu $P \notin \Delta_2$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$.

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm $M(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Chú ý:

a) Nếu $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

b) Để xét hai vectơ $\vec{n}_1(a_1; b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2; b_2)$ cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$:

- Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ thì hai vectơ cùng phương.
- Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hai vectơ không cùng phương.

Trong trường hợp tất cả các hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 đều khác 0, ta có thể xét hai trường hợp:

- Nếu $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ cùng phương.
- Nếu $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ không cùng phương.

Ví dụ 5

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1: $2x + y - 2 = 0$ và Δ_2: $x - 2 = 0$;

b) Δ_1: $2x + y - 2 = 0$ và Δ_2: $x - y - 1 = 0$;

c) Δ_1: $2x + y - 2 = 0$ và Δ_2: $4x + 2y + 3 = 0$;

d) Δ_1: $2x + y - 2 = 0$ và Δ_2: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 6t; \end{cases}$

e) Δ_1: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t. \end{cases}$

Giải

a) Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 1)$ và $\vec{n}_2 = (1; 0)$.

Ta có: $a_1b_2 - a_2b_1 = 2 . 0 - 1 . 1 = -1 \neq 0$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm M. Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ ta được $M(2; -2)$.

b) Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 1)$ và $\vec{n}_2 = (1; -1)$.

Ta có: $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm M. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ ta được } M(1; 0).$$

c) Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 1)$ và $\vec{n}_2 = (4; 2)$.

Ta có $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương. Vậy Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy điểm $M(1; 0)$ thuộc Δ_1, thay toạ độ của M vào phương trình Δ_2, ta được $4 + 0 + 3 = 7 \neq 0$, suy ra M không thuộc Δ_2. Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.

d) Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 1)$ và $\vec{n}_2 = (6; 3)$.

Ta có $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương. Vậy Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Lấy điểm $P(0; 2)$ thuộc Δ_2, thay toạ độ của P vào phương trình Δ_1, ta được $0 + 2 - 2 = 0$, suy ra P thuộc Δ_2. Vậy $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

e) Δ_1 và Δ_2 có phương trình tổng quát lần lượt là $2x + y - 2 = 0$ và $x - 2y - 1 = 0$, có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 1)$ và $\vec{n}_2 = (1; -2)$.

Ta có $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 2 . 1 + 1 . (-2) = 0$ nên $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ vuông góc, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$ ta được nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy Δ_1 và Δ_2 vuông góc và cắt nhau tại $M(1; 0)$.

4 Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $x - 5y + 9 = 0$ và d_2: $10x + 2y + 7 = 10$;

b) d_1: $3x - 4y + 9 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t; \end{cases}$

c) d_1: $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 4 + 3t. \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 1 + 6t. \end{cases}$

4 Viết phương trình đường thẳng d_1:

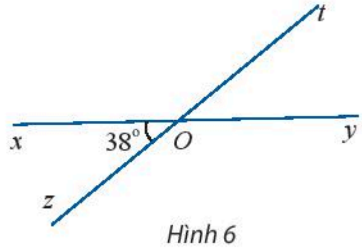
a) Đi qua điểm $A(2; 3)$ và song song với đường thẳng d_2: $x + 3y + 2 = 0$;

b) Đi qua điểm $B(4; -1)$ và vuông góc với đường thẳng d_3: $3x - y + 1 = 0$.

3. Góc giữa hai đường thẳng

5 Cho hai đường thẳng xy và zt cắt nhau tại O và cho biết $\widehat{xOz} = 38^\circ$ (Hình 6).

Tính số đo các góc $\widehat{xOt}$, $\widehat{tOy}$ và $\widehat{yOz}$.



Hình 6

Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2.
- Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Ta quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

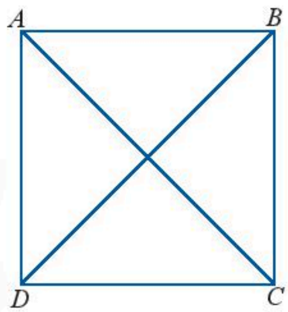
Như vậy góc α giữa hai đường thẳng luôn thoả mãn: $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Ví dụ 6

Cho hình vuông $ABCD$ (Hình 7), tính các góc:

(AB, AC), (AB, AD), (AB, DC), (AC, CD).



Hình 7

Giải

Ta có:

- $\widehat{BAC} = 45^\circ$, suy ra $(AB, AC) = 45^\circ$.
- AB vuông góc với AD, suy ra $(AB, AD) = 90^\circ$.
- AB // DC, suy ra $(AB, DC) = 0^\circ$.
- $\widehat{ACD} = 45^\circ$, suy ra $(AC, CD) = 45^\circ$.

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

6 Cho hai đường thẳng

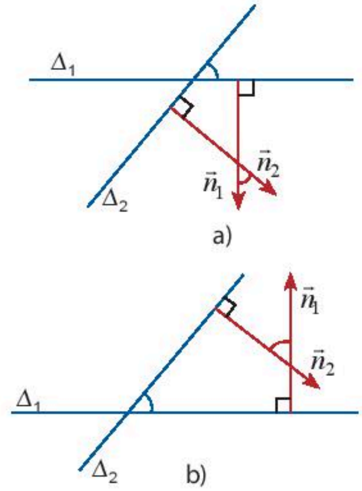
Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $(a_1^2 + b_1^2 > 0)$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_2^2 + b_2^2 > 0)$

có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$.

Tìm toạ độ của $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ và tính $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.

Ta thấy góc (Δ_1, Δ_2) giữa hai đường thẳng và góc $\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)$ giữa hai vectơ pháp tuyến luôn bằng nhau hoặc bù nhau (Hình 8). Do đó:

$$\cos\left(\Delta_1, \Delta_2\right) = \left|\cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}_1 . \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}.$$



Hình 8

Ta có công thức:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} . \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Nhận xét: Nếu Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ thì $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right|$.

Chú ý: Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hai vectơ pháp tuyến vuông góc. Do đó:

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1b_2 = 0.$$

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích các hệ số góc bằng -1 *thì vuông góc với nhau.*

Ví dụ 7

Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $2x + 4y + 5 = 0$ và d_2: $3x + y + 2022 = 0$;

b) d_1: $x + 2y + 1 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = t \\ y = 99 + 2t; \end{cases}$

c) d_1: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 7t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 2022 + 4t \\ y = 2023 - 14t. \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\cos\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|2.3 + 4.1\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2} . \sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{200}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

b) d_2 có phương trình tổng quát là $2x - y + 99 = 0$. Ta có: $a_1 . a_2 + b_1 . b_2 = 1 . 2 + 2 . (-1) = 0$, suy ra $(d_1, d_2) = 90^\circ$.

c) Hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; -7)$, $\vec{u}_2 = (4; -14)$. Ta có $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$, do đó $\vec{u}_1 \; // \; \vec{u}_2$, suy ra $(d_1, d_2) = 0^\circ$.

Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp sau:

a) Δ_1: $x + 3y - 7 = 0$ và Δ_2: $x - 2y + 3 = 0$;

b) Δ_1: $4x - 2y + 5 = 0$ và Δ_2: $\begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t; \end{cases}$

c) Δ_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 1 - t. \end{cases}$

Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng là đồ thị của hai hàm số $y = x$ và $y = 2x + 1$.

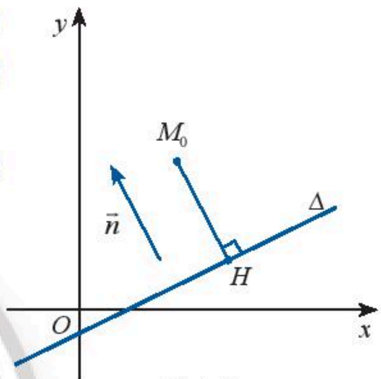
4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ có hình chiếu vuông góc $H(x_H; y_H)$ trên Δ (Hình 9).

a) Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{HM_0}$ cùng phương và tìm toạ độ của chúng.

b) Gọi p là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{HM_0}$. Chứng minh rằng $p = ax_0 + by_0 + c$.

c) Giải thích công thức $\left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \dfrac{|p|}{|\vec{n}|}$.



Hình 9

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. ***Khoảng cách*** từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ví dụ 8

Tính khoảng cách từ các điểm $O(0; 0)$, $M(1; 2)$ đến đường thẳng Δ: $4x + 3y + 5 = 0$.

Giải

Ta có: $d(O, \Delta) = \dfrac{|4.0 + 3.0 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$, $d(M, \Delta) = \dfrac{|4.1 + 3.2 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$.

Ví dụ 9

Trong một khu vực bằng phẳng, ta lấy hai xa lộ vuông góc với nhau làm hai trục toạ độ và mỗi đơn vị độ dài trên trục tương ứng với 1 km. Cho biết với hệ trục toạ độ vừa chọn thì một trạm viễn thông T có toạ độ (2; 3). Một người đang gọi điện thoại di động trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $6x + 8y - 5 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông T.

Giải

Khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông T chính là khoảng cách từ T đến đường thẳng Δ. Ta có:

$$d(T, \Delta) = \frac{|6.2 + 8.3 - 5|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{31}{10} = 3{,}1 \text{ (km)}.$$

6 Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(1; 1)$, $B(5; 2)$, $C(4; 4)$. Tính độ dài các đường cao của tam giác ABC.

6 Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1: $4x - 3y + 2 = 0$ và d_2: $4x - 3y + 12 = 0$.

BÀI TẬP

Các bài toán sau đây được xét trong mặt phẳng Oxy.

1. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $A(-1; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1)$;

b) d đi qua điểm $B(4; -2)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2)$;

c) d đi qua $P(1; 1)$ và có hệ số góc $k = -2$;

d) d đi qua hai điểm $Q(3; 0)$ và $R(0; 2)$.

2. Cho tam giác ABC, biết $A(2; 5)$, $B(1; 2)$ và $C(5; 4)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng BC.

b) Lập phương trình tham số của trung tuyến AM.

c) Lập phương trình của đường cao AH.

3. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $3x + y + 9 = 0$;

b) Δ đi qua $B(-1; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $2x - y - 2 = 0$.

4. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 sau đây:

a) d_1: $x - y + 2 = 0$ và d_2: $x + y + 4 = 0$; b) d_1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ và d_2: $5x - 2y + 9 = 0$;

c) d_1: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ và d_2: $3x + y - 11 = 0$.

5. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t. \end{cases}$

Tìm giao điểm của d với hai trục toạ độ.

6. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $x - 2y + 3 = 0$ và d_2: $3x - y - 11 = 0$;

b) d_1: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ và d_2: $x + 5y - 5 = 0$;

c) d_1: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 4t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = t \\ y = -9 + 2t. \end{cases}$

7. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) $M(1; 2)$ và Δ: $3x - 4y + 12 = 0$;

b) $M(4; 4)$ và Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = -t; \end{cases}$

c) $M(0; 5)$ và Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{-19}{4}; \end{cases}$

d) $M(0; 0)$ và Δ: $3x + 4y - 25 = 0$.

8. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng: Δ: $3x + 4y - 10 = 0$ và Δ': $6x + 8y - 1 = 0$.

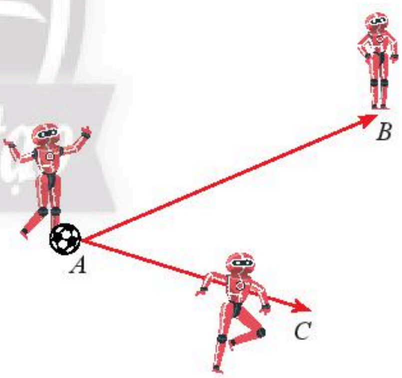
9. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $S(x; y)$ di động trên đường thẳng d: $12x - 5y + 16 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm $M(5; 10)$ đến điểm S.

10. Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi $A(-1; 1)$, $B(9; 6)$, $C(5; -3)$ là ba vị trí trên màn hình.

a) Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, BC.

b) Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC.

c) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.



Hình 10

Bài 3. Đường tròn trong mặt phẳng toạ độ

Từ khoá: Phương trình đường tròn; Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại toạ độ (30; 40) và vòi có thể phun xa tối đa 50 m. Làm thế nào để viết phương trình biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi này có thể phun tới?

1. Phương trình đường tròn

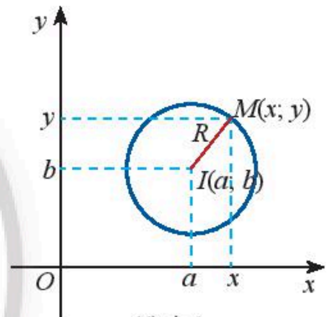
1 Hãy nhắc lại công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $I(a; b)$ và $M(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) tâm $I(a; b)$, bán kính R.

Ta có $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow IM = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



Hình 1

Phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ được gọi là ***phương trình đường tròn*** tâm $I(a; b)$ bán kính R.

Ví dụ 1

Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính R;

b) (C) có tâm $I(1; -3)$, bán kính $R = 5$;

c) (C) đi qua ba điểm $A(3; 6)$, $B(2; 3)$ và $C(6; 5)$.

Giải

a) Đường tròn (C) tâm $O(0; 0)$, bán kính R có phương trình: $x^2 + y^2 = R^2$.

b) Đường tròn tâm $I(1; -3)$, bán kính $R = 5$ có phương trình: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có $M\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$, $N\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Đường trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB là đường thẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{BA} = (1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình: $x + 3y - 16 = 0$.

Đường trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC là đường thẳng đi qua N và nhận $\overrightarrow{AC} = (3; -1)$ làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình: $3x - y - 8 = 0$.

Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $I(4; 4)$ cách đều ba điểm A, B, C, suy ra đường tròn (C) cần tìm có tâm $I(4; 4)$ và có bán kính $R = IA = \sqrt{5}$. Vậy (C) có phương trình: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Ví dụ 2

Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 49$; b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 14$; c) $(x - 6)^2 + y^2 = 9$.

Giải

a) (C) có tâm $I(7; 2)$ và có bán kính $R = 7$.

b) (C) có tâm $I(-3; 5)$ và có bán kính $R = \sqrt{14}$.

c) (C) có tâm $I(6; 0)$ và có bán kính $R = 3$.

Nhận xét: Ta có $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$.

Vậy phương trình đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$. Khi đó đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Ví dụ 3

Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$.

Giải

a) Phương trình đã cho có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = 2$; $b = -3$; $c = -23$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 + 23 = 36 > 0$. Vậy đây là phương trình đường tròn có tâm $I(2; -3)$ và có bán kính $R = \sqrt{36} = 6$.

b) Phương trình đã cho có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = 1$; $b = 2$; $c = 9$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 = -4 < 0$. Vậy đây không phải phương trình đường tròn.

1 Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 4$; b) (C) có tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 8$;

c) (C) đi qua ba điểm $A(1; 4)$, $B(0; 1)$, $C(4; 3)$.

Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$; b) $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 121$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$; d) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$.

Theo dữ kiện đã cho trong hoạt động khởi động của bài học, viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới.

Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục toạ độ để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Cho biết một đèn chiếu đang rọi trên sân khấu một vùng sáng bên trong đường tròn (C) có phương trình $(x - 13)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (C).

b) Cho biết toạ độ trên sân khấu của ba diễn viên A, B, C như sau: $A(11; 4)$, $B(8; 5)$, $C(15; 5)$. Diễn viên nào đang được đèn chiếu sáng?

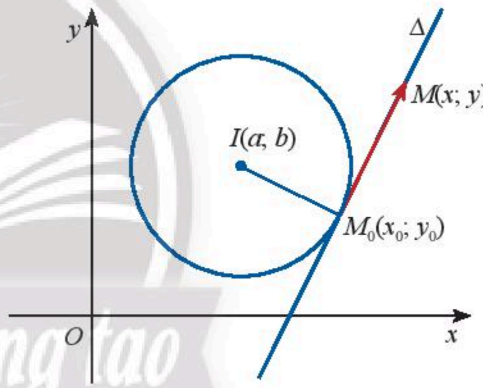
2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ và cho điểm $M(x; y)$ tuỳ ý trong mặt phẳng Oxy. Gọi Δ là tiếp tuyến với (C) tại M_0.

a) Viết toạ độ của hai vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ và $\overrightarrow{M_0I}$.

b) Viết biểu thức toạ độ của tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ và $\overrightarrow{M_0I}$.

c) Phương trình $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0I} = 0$ là phương trình của đường thẳng nào?



Hình 2

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm $I(a; b)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn là:

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0.$$

Ví dụ 4

Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 5$ tại điểm $M(1; 2)$.

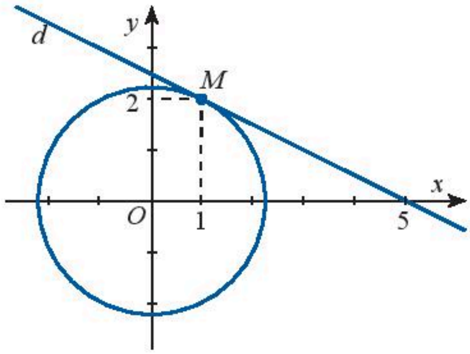
Giải

Ta có $1^2 + 2^2 = 5$, nên điểm M thuộc (C).

Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 5$ có tâm $O(0; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại $M(1; 2)$ là:

$$(0-1)(x-1)+(0-2)(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow -x-2y+5=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-5=0.$$



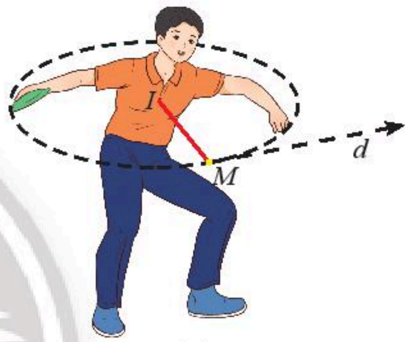
Hình 3

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ tại điểm $A(4; 6)$.

Một vận động viên ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C) có phương trình:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{169}{144}.$$

Khi người đó vung đĩa đến vị trí điểm $M\left(\frac{17}{12};2\right)$ thì buông đĩa (Hình 4). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M.



Hình 4

BÀI TẬP

1. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$;

b) $x^2+y^2-2x+4y+2=0$;

c) $x^2+y^2-3x+2y+7=0$;

d) $2x^2+2y^2+x+y-1=0$.

2. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(1; 5)$ và có bán kính $r=4$;

b) (C) có đường kính MN với $M(3; -1)$ và $N(9; 3)$;

c) (C) có tâm $I(2; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $5x-12y+11=0$;

d) (C) có tâm $A(1; -2)$ và đi qua điểm $B(4; -5)$.

3. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có toạ độ các đỉnh là:

a) $M(2; 5)$, $N(1; 2)$, $P(5; 4)$;

b) $A(0; 6)$, $B(7; 7)$, $C(8; 0)$.

4. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox, Oy và đi qua điểm $A(4; 2)$.

5. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng điểm $M(4; 6)$ thuộc đường tròn (C).

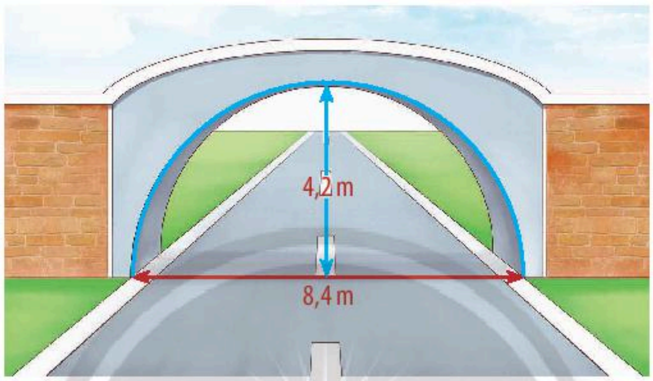
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(4; 6)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $4x + 3y + 2022 = 0$.

6. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 8,4 m, cao 4,2 m như Hình 5. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

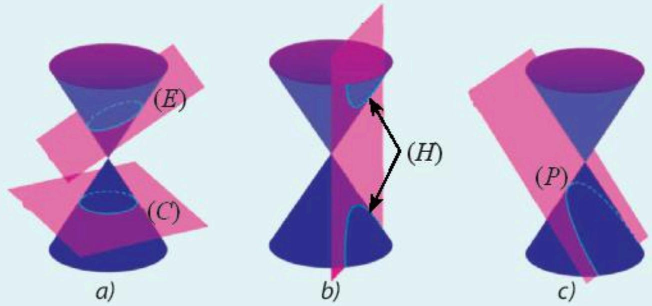
b) Một chiếc xe tải rộng 2,2 m và cao 2,6 m đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?



Hình 5

Bài 4. Ba đường conic trong mặt phẳng toạ độ

Từ khoá: **Đường conic; Elip; Hypebol; Parabol; Tiêu điểm; Đường chuẩn; Phương trình chính tắc; Đỉnh; Trục; Trục lớn; Trục nhỏ; Trục thực; Trục ảo; Tâm đối xứng; Tham số tiêu.**



Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng vuông góc với trục và không đi qua đỉnh của mặt nón thì ta thu được một đường tròn (C). Nếu thay đổi vị trí của mặt phẳng, ta sẽ có thêm các loại "đường" khác như hình trên, các đường đó gọi là các đường conic. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về đặc điểm của các "đường" này và cách viết phương trình của chúng trong mặt phẳng toạ độ.

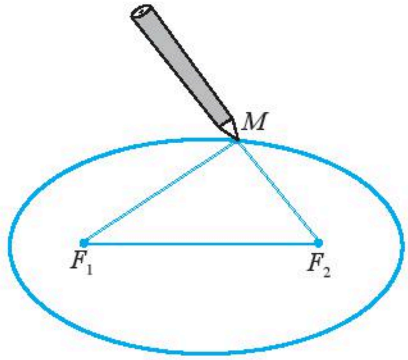
1. Elip

Nhận biết elip

1 Lấy một tấm bìa, ghim hai cái đinh lên đó tại hai điểm F_1 và F_2. Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn hai lần đoạn F_1F_2. Quàng vòng dây đó qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip.

Cho biết $2c$ là khoảng cách F_1F_2 và $2a + 2c$ là độ dài của vòng dây.

Tính tổng hai khoảng cách F_1M và F_2M.



Hình 1

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2. ***Elip*** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip $(a > c)$.

Phương trình chính tắc của elip

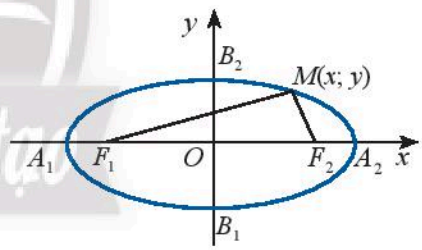
2 Cho elip (E) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

Xét điểm $M(x; y)$.

a) Tính F_1M và F_2M theo x, y và c.

b) Giải thích phát biểu sau:

$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$



Hình 2

Người ta chứng minh được:

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

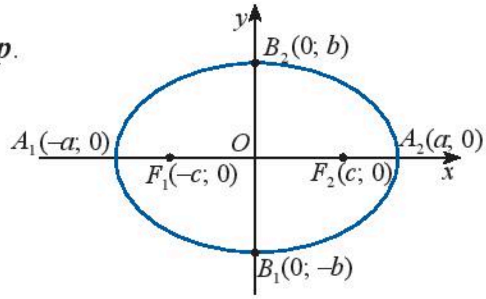
trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc của elip***.

Chú ý:

• (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

• Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các ***đỉnh*** của elip.



Hình 3

• Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là ***trục lớn***, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là ***trục nhỏ*** của elip.

• Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

• Nếu $M(x; y) \in (E)$ thì $|x| \leq a$, $|y| \leq b$.

Ví dụ 1

Viết phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài hai trục lần lượt là 26 và 10.

Giải

Ta có: $2a = 26$; $2b = 10$, suy ra $a = 13$; $b = 5$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Ví dụ 2

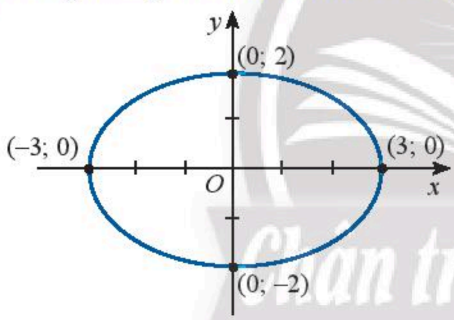
Viết phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 20 và tiêu cự bằng 12.

Giải

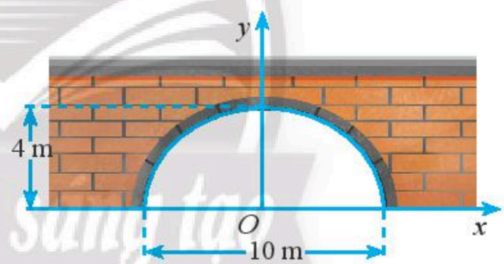
Ta có: $2a = 20$; $2c = 12$, suy ra $a = 10$; $c = 6$ và $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

1 Viết phương trình chính tắc của elip trong Hình 4.



Hình 4



Hình 5

1 Một đường hầm có mặt cắt hình nửa elip cao 4 m, rộng 10 m (Hình 5). Viết phương trình chính tắc của elip đó.

2. Hypebol

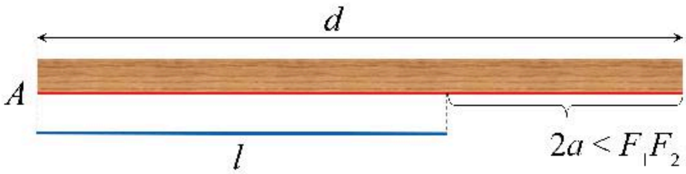
Nhận biết hypebol

3 Lấy một tấm bìa, trên đó đánh dấu hai điểm F_1 và F_2. Lấy một cây thước thẳng với mép thước AB có chiều dài d và một đoạn dây không đàn hồi có chiều dài l sao cho $d - l = 2a$ nhỏ hơn khoảng cách F_1F_2 (Hình 6a).

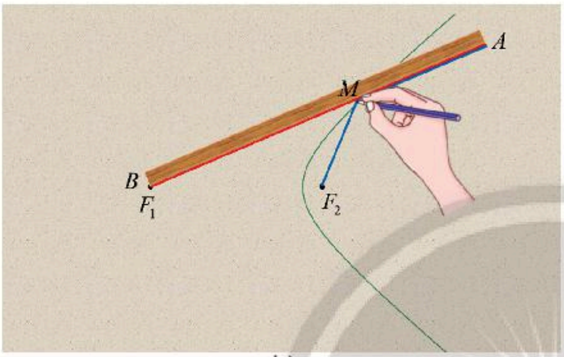
Đính một đầu dây vào đầu A của thước, dùng đinh ghim đầu dây còn lại vào điểm F_2. Đặt thước sao cho đầu B của thước trùng với điểm F_1 và đoạn thẳng BA có thể quay quanh F_1. Tựa đầu bút chì M vào đoạn dây, di chuyển M trên tấm bìa và giữ sao cho dây luôn căng, đoạn AM ép sát vào thước, khi đó M sẽ vạch ra trên tấm bìa một đường (H) (xem Hình 6b).

a) Chứng tỏ rằng khi M di động, ta luôn có $MF_1 - MF_2 = 2a$.

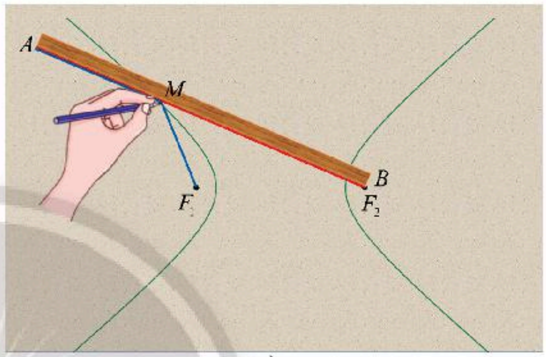
b) Vẫn đính một đầu dây vào đầu A của thước nhưng đổi chỗ cố định đầu dây còn lại vào F_1, đầu B của thước trùng với F_2 sao cho đoạn thẳng BA có thể quay quanh F_2 và làm tương tự như lần đầu để đầu bút chì M vẽ được một nhánh khác của đường (H) (Hình 6c). Tính $MF_2 - MF_1$.



a)



b)



c)

Hình 6

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ nhỏ hơn F_1F_2. ***Hypebol*** (H) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $|F_1M - F_2M| = 2a$.

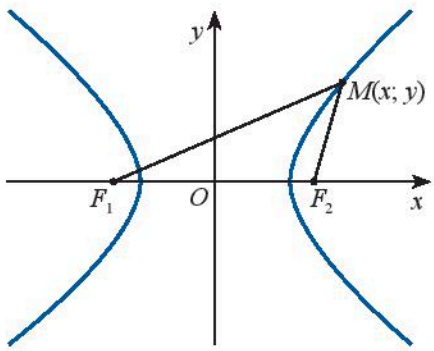
Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol ($c > a$).

Phương trình chính tắc của hypebol

4 Cho hypebol (H) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Điểm M thuộc hypebol (H) khi và chỉ khi $|F_1M - F_2M| = 2a$. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1 = (-c; 0)$ và $F_2 = (c; 0)$.

Xét điểm $M(x; y)$.



Hình 7

a) Tính F_1M và F_2M theo x, y và c.

b) Giải thích phát biểu sau:

$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$

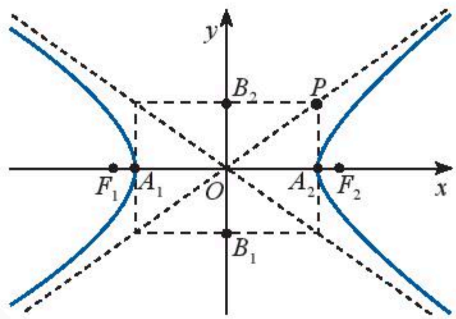
Người ta chứng minh được:

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

trong đó $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Phương trình (2) gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol***.

Chú ý:



Hình 8

• (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1 = (-a; 0)$ và $A_2 = (a; 0)$. Nếu vẽ hai điểm $B_1 = (-b; 0)$ và $B_2 = (b; 0)$ vào hình chữ nhật OA_2PB_2 thì $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.

• Các điểm A_1, A_2 gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.

• Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là ***trục thực***, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là ***trục ảo*** của hypebol.

• Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của hypebol.

• Nếu $M(x; y) \in (H)$ thì $x \leq -a$ hoặc $x \geq a$.

Ví dụ 3

Viết phương trình chính tắc của hypebol có độ dài trục thực bằng 16 và tiêu cự bằng 20.

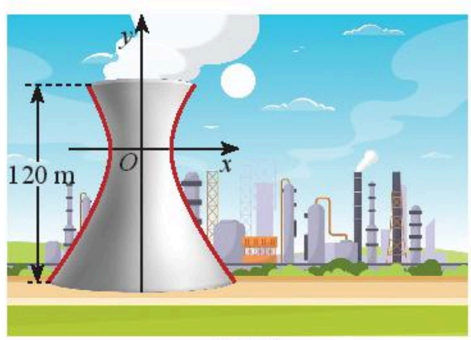
Giải

Ta có: $2a = 16 \Rightarrow a = 8$; $2c = 20 \Rightarrow c = 10$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

2 Viết phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 10 và độ dài trục ảo bằng 6.

2 Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là một hypebol có phương trình $\frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$ (Hình 9). Cho biết chiều cao của tháp là 120 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính đường tròn nóc và bán kính đường tròn đáy của tháp.



Hình 9

3. Parabol

Nhận biết parabol

5 Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$, đường thẳng Δ: $y+\frac{1}{2}=0$ và điểm $M(x; y)$.

Để tìm hệ thức giữa x và y sao cho M cách đều F và Δ, một học sinh đã làm như sau:

• Tính MF và MH (với H là hình chiếu của M lên Δ):

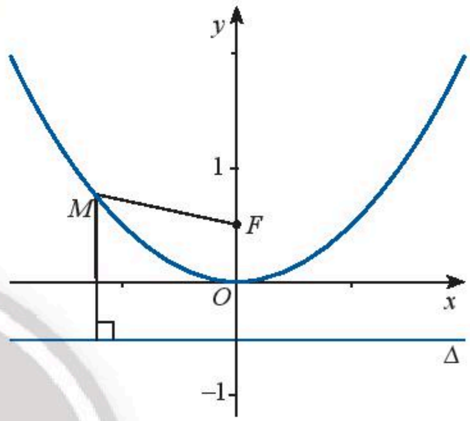
$$MF=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2},\ MH=d(M,\Delta)=\left|y+\frac{1}{2}\right|.$$

• Điều kiện để M cách đều F và Δ:

$$MF=d(M,\Delta)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{2}\right|.$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2=2y\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x^2.\quad (*)$$



Hình 10

Hãy cho biết tên đồ thị (P) của hàm số (*) vừa tìm được.

Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và Δ.

F gọi là ***tiêu điểm*** và Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P).

Phương trình chính tắc của parabol

6 Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là p, hiển nhiên $p>0$.

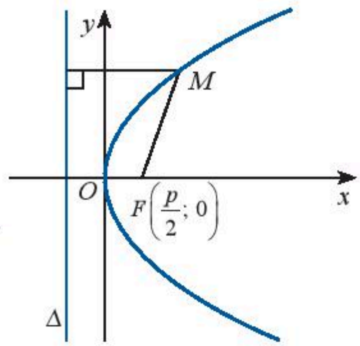
Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và $\Delta: x+\frac{p}{2}=0$.

Xét điểm $M(x; y)$.

a) Tính MF và $d(M, \Delta)$.

b) Giải thích phát biểu sau:

$$M(x;\mathrm{y})\in(P)\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$



Hình 11

Người ta chứng minh được:

$$M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2px. \qquad (3)$$

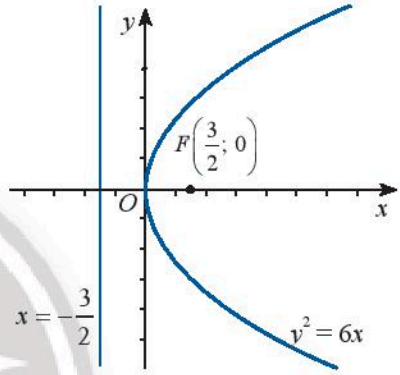
Phương trình (3) gọi là ***phương trình chính tắc của parabol***.

Chú ý:

- O gọi là ***đỉnh*** của parabol (P).
- Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).
- p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).
- Nếu $M(x; y) \in (P)$ thì $x \geq 0$ và $M'(x; -y) \in (P)$.

Ví dụ 4

Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ (Hình 12).



Hình 12

Giải

(P) có tiêu điểm $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, suy ra $\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$ hay $p = 3$.

Vậy (P) có phương trình $y^2 = 6x$.

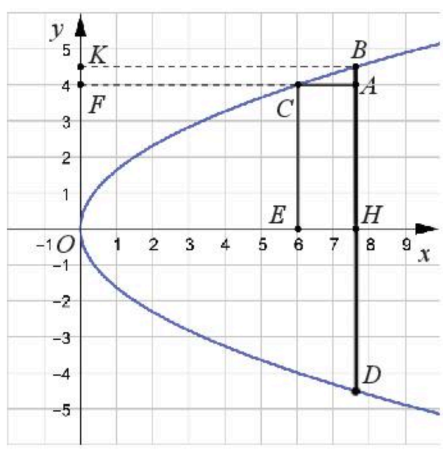
Ví dụ 5

Cổng của một ngôi trường có dạng một parabol. Để đo chiều cao h của cổng, một người đo khoảng cách giữa hai chân cổng được 9 m, người đó thấy nếu đứng cách chân cổng 0,5 m thì đầu chạm cổng. Cho biết người này cao 1,6 m, hãy tính chiều cao của cổng.


Hình 13

Giải

Ta vẽ lại parabol và chọn hệ trục toạ độ như Hình 14. Gọi phương trình của parabol là $y^2 = 2px$.



Hình 14

Ta có chiều cao của cổng là $OH = BK = h$, bề rộng của cổng là $BD = 9$, suy ra $BH = 4{,}5$. Vậy điểm B có toạ độ là $(h; 4{,}5)$.

Chiều cao của người đo là $AC = 1{,}6$ và khoảng cách từ chân người đo đến chân cổng là $BA = 0{,}5$. Suy ra $FC = FA - AC = h - 1{,}6$ và $EC = BH - AB = 4{,}5 - 0{,}5 = 4$. Vậy điểm C có toạ độ là $(h - 1{,}6; 4)$.

Ta có hai điểm B và C nằm trên parabol nên thay toạ độ của B và C vào phương trình (P), ta được:

$$\begin{cases} 4,5^2 = 2ph \\ 4^2 = 2p(h-1,6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2p = \frac{4,5^2}{h} = \frac{4^2}{h-1,6} = \frac{4,5^2-4^2}{1,6}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1,6.4,5^2}{4,5^2-4^2} \approx 7,62 \text{ (m)}.$$

Vậy cổng trường đó cao khoảng 7,62 m.

3 Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có đường chuẩn Δ: $x + 1 = 0$.

3 Một cổng chào có hình parabol cao 10 m và bề rộng của cổng tại chân cổng là 5 m. Tính bề rộng của cổng tại chỗ cách đỉnh 2 m.

BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của:

a) Elip có trục lớn bằng 20 và trục nhỏ bằng 16;

b) Hypebol có tiêu cự $2c = 20$ và độ dài trục thực $2a = 12$;

c) Parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

2. Viết phương trình chính tắc của các đường conic dưới đây. Gọi tên và tìm toạ độ các tiêu điểm của chúng.

a) (C_1): $4x^2 + 16y^2 = 1$; b) (C_2): $16x^2 - 4y^2 = 144$; c) (C_3): $x = \frac{1}{8}y^2$.

3. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 80 cm và trục nhỏ là 40 cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80 cm × 40 cm, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:

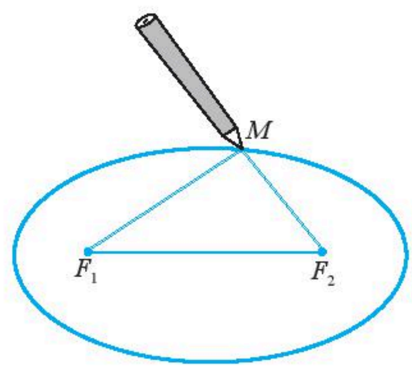
Chuẩn bị:

– Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

– Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.

– Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại



Hình 15

điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường elip. (Xem minh hoạ trong Hình 15).

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu xentimét và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

4. Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 8 m, rộng 20 m (Hình 16).

a) Chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

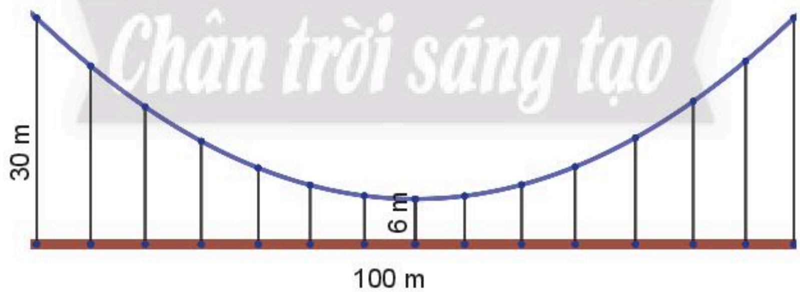
b) Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 5 m lên đến nóc nhà vòm.

Hình 16

5. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$ (Hình 17). Biết chiều cao của tháp là 150 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Hình 17

6. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài 100 m và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là 30 m, thanh ngắn nhất là 6 m (Hình 18). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 18 m.



Hình 18

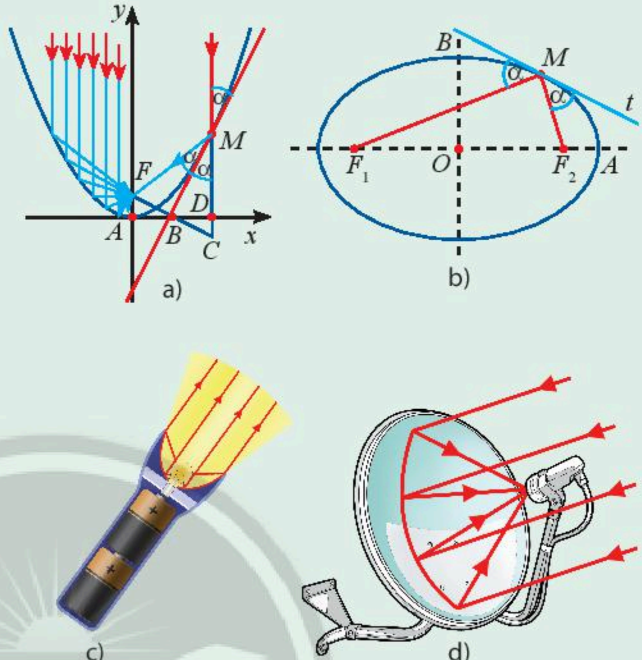
Bạn có biết?

Tính chất quang học của ba đường conic

Người ta chứng minh được:

– Tiếp tuyến tại một điểm M của parabol có tiêu điểm F và trục d luôn hợp với hai đường thẳng d và MF những góc bằng nhau.

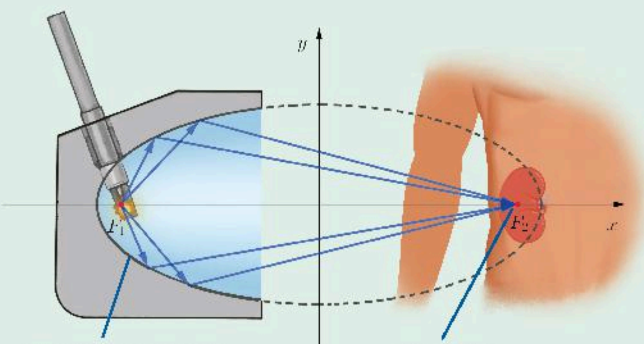
– Tiếp tuyến tại một điểm M của elip hay hypebol có tiêu điểm F_1, F_2 luôn hợp với hai đường thẳng MF_1 và MF_2 những góc bằng nhau.



Hình 19

Áp dụng tính chất trên, người ta chế tạo ra các choá đèn chiếu hoặc các chảo ăng-ten có mặt cắt hình parabol. Khi đặt bóng đèn tại tiêu điểm F thì chùm tia sáng chiếu từ F tới choá đều cho chùm tia phản chiếu song song với trục của parabol, khiến ánh sáng chiếu ra được xa và tập trung hơn. Đối với ăng-ten parabol thì ngược lại, các tia tín hiệu song song với trục của parabol khi tới chảo đều cho tia phản xạ hội tụ tại F là nơi đặt đầu thu tín hiệu, khiến sóng vô tuyến thu được tập trung và rõ hơn.

Đối với elip, tính chất trên còn được dùng trong việc chế tạo máy tán sỏi thận. Trong đó, đầu phát siêu âm đặt tại F_1, bệnh nhân được đặt nằm sao cho viên sỏi thận ở vị trí F_2, chùm siêu âm xuất phát từ F_1 khi tới elip sẽ hội tụ tại F_2 khiến việc điều trị hiệu quả hơn.



Hình 20

(*Nguồn:* https://medical-dictionary.thefreedictionary.com/lithotripsy)

Các tính chất vừa nêu thường được gọi chung là tính chất quang học của ba đường conic.

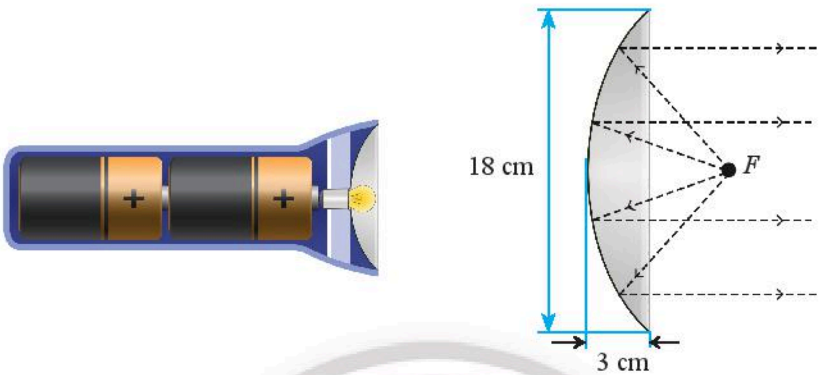
THỬ THÁCH

Áp dụng tính chất quang học của parabol để giải quyết vấn đề sau đây:

Một đèn pin có choá đèn có mặt cắt hình parabol với kích thước như trong Hình 21.

a) Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho gốc O là đỉnh của parabol và trục Ox đi qua tiêu điểm. Viết phương trình của parabol trong hệ toạ độ vừa chọn.

b) Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn cách đỉnh của choá đèn bao nhiêu xentimét?



Hình 21

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(2; 1)$, $B(1; 4)$, $C(4; 5)$, $D(5; 2)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một hình vuông.

b) Tìm toạ độ tâm I của hình vuông $ABCD$.

2. Cho AB và CD là hai dây cung vuông góc tại E của đường tròn (O). Vẽ hình chữ nhật $AECF$. Dùng phương pháp toạ độ để chứng minh EF vuông góc với DB.

3. Tìm toạ độ giao điểm và góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) d_1: $x - y + 2 = 0$ và d_2: $x + y + 4 = 0$;

b) d_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ và d_2: $x - 3y + 2 = 0$;

c) d_1: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = 3 + 1t' \end{cases}$.

4. Tính bán kính của đường tròn tâm $M(-2; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng

d: $14x - 5y + 60 = 0$.

5. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

Δ: $6x + 8y - 13 = 0$ và Δ': $3x + 4y - 27 = 0$.

6. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn có phương trình:

a) $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 64$;

b) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

7. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(-2; 4)$ và bán kính bằng 9;

b) Có tâm $I(1; 2)$ và đi qua điểm $A(4; 5)$;

c) Đi qua hai điểm $A(4; 1)$, $B(6; 5)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $4x + y - 16 = 0$;

d) Đi qua gốc toạ độ và cắt hai trục toạ độ tại các điểm có hoành độ là a, tung độ là b.

8. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 100$ tại điểm $M(11; 11)$.

9. Tìm toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, độ dài trục lớn và trục nhỏ của các elip sau:

a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

c) $x^2 + 16y^2 = 16$.

10. Viết phương trình chính tắc của elip thoả mãn từng điều kiện:

a) Đỉnh $(5; 0)$, $(0; 4)$;

b) Đỉnh $(5; 0)$, tiêu điểm $(3; 0)$;

c) Độ dài trục lớn 16, độ dài trục nhỏ 12;

d) Độ dài trục lớn 20, tiêu cự 12.

11. Tìm toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, độ dài trục thực và trục ảo của các hypebol sau:

a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$;

c) $x^2 - 16y^2 = 16$; d) $9x^2 - 16y^2 = 144$.

12. Viết phương trình chính tắc của hypebol thoả mãn từng điều kiện sau:

a) Đỉnh $(3; 0)$, tiêu điểm $(5; 0)$;

b) Độ dài trục thực 8, độ dài trục ảo 6.

13. Tìm toạ độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol sau:

a) $y^2 = 12x$; b) $y^2 = x$.

14. Viết phương trình chính tắc của parabol thoả mãn từng điều kiện sau:

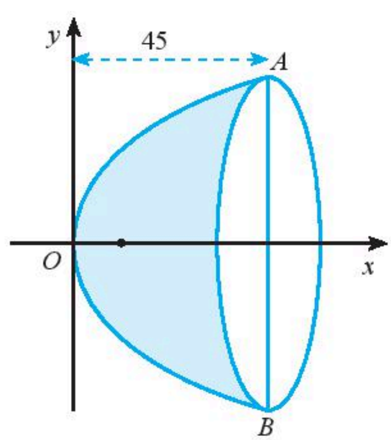
a) Tiêu điểm $(4; 0)$;

b) Đường chuẩn có phương trình $x = -\dfrac{1}{6}$;

c) Đi qua điểm $(1; 4)$;

d) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 8.

15. Một gương lõm có mặt cắt hình parabol như Hình 1, có tiêu điểm cách đỉnh 5 cm. Cho biết bề sâu của gương là 45 cm, tính khoảng cách AB.

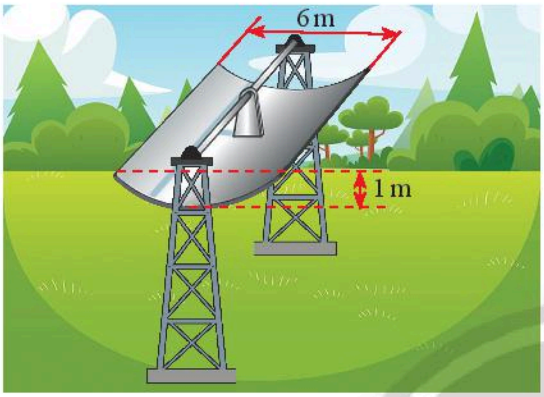


Hình 1

16. Một bộ thu năng lượng mặt trời để làm nóng nước được làm bằng một tấm thép không gỉ có mặt cắt hình parabol (Hình 2). Nước sẽ chảy thông qua một đường ống nằm ở tiêu điểm của parabol.

a) Viết phương trình chính tắc của parabol.

b) Tính khoảng cách từ tâm đường ống đến đỉnh của parabol.



Hình 2

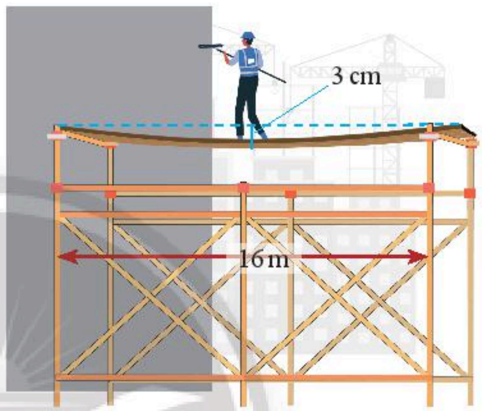
17. Cổng chào của một thành phố dạng hình parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 192 m (Hình 3). Từ một điểm M trên thân cổng, người ta đo được khoảng cách đến mặt đất là 2 m và khoảng cách từ chân đường vuông góc vẽ từ M xuống mặt đất đến chân cổng gần nhất là 0,5 m. Tính chiều cao của cổng.


Hình 3

18. Một người đứng ở giữa một tấm ván gỗ đặt trên một giàn giáo để sơn tường nhà. Biết rằng giàn giáo dài 16 m và độ võng tại tâm của ván gỗ (điểm ở giữa ván gỗ) là 3 cm (Hình 4). Cho biết đường cong của ván gỗ có hình parabol.

a) Giả sử tâm ván gỗ trùng với đỉnh của parabol, tìm phương trình chính tắc của parabol.

b) Điểm có độ võng 1 cm cách tâm ván gỗ bao xa?



Hình 4

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương X XÁC SUẤT

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm cơ bản trong xác suất là phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu, biến cố, biến cố đối và công thức tính xác suất của biến cố.

Xác suất là một công cụ được nhiều nhà đầu tư sử dụng để phân tích thị trường chứng khoán nhằm tìm ra phương án kinh doanh hiệu quả.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu và biến cố.

– Tính được xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp và sử dụng sơ đồ hình cây.

– Hiểu được ý nghĩa và các tính chất cơ bản của xác suất.

– Nhận biết được khái niệm biến cố đối và tính được xác suất của biến cố đối.

Bài 1. Không gian mẫu và biến cố

Từ khoá: Phép thử ngẫu nhiên; Không gian mẫu; Biến cố; Kết quả thuận lợi.

Ta thường gặp những hoạt động mà không thể đoán trước được kết quả của nó mặc dù biết được tất cả các kết quả có thể xảy ra, ví dụ như khi ta gieo một con xúc xắc, tung đồng xu, ... Trong bài này, ta sẽ tìm hiểu các hoạt động trên theo quan niệm của xác suất cổ điển.

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

1 Ba bạn An, Bình, Cường đang chơi cùng với nhau. An gieo một con xúc xắc 6 mặt cân đối (viết tắt là xúc xắc) hai lần. Nếu kết quả hai lần gieo ra hai mặt có số chấm khác nhau thì Bình thắng. Ngược lại, nếu kết quả hai lần gieo ra hai mặt có số chấm giống nhau thì Cường thắng.

Hình 1

a) Trước khi An gieo con xúc xắc, có thể biết bạn nào sẽ chiến thắng không?

b) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra đối với số chấm xuất hiện trong hai lần gieo.

Ở hoạt động trên, trước khi An gieo xúc xắc ta không thể biết được kết quả nào có thể xảy ra. Có thể cả hai lần tung đều ra mặt có số chấm giống nhau, hoặc hai lần tung ra hai mặt có số chấm khác nhau. Ta nói rằng An đã thực hiện một *phép thử ngẫu nhiên*.

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là ***không gian mẫu***, kí hiệu là Ω.

Chú ý: Trong chương này ta chỉ xét các phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn phần tử.

Ví dụ 1

Một đồng xu có hai mặt, trên một mặt có ghi giá trị của đồng xu, thường gọi là mặt sấp, mặt kia là mặt ngửa. Hãy xác định không gian mẫu của mỗi phép thử ngẫu nhiên sau:

a) Tung đồng xu một lần;

b) Tung đồng xu hai lần.

Mặt sấp Mặt ngửa

Hình 2

Giải

a) Khi tung đồng xu một lần, ta có không gian mẫu là $\Omega = \{S; N\}$, trong đó kí hiệu S để chỉ đồng xu xuất hiện mặt sấp và N để chỉ đồng xu xuất hiện mặt ngửa.

b) Khi tung đồng xu hai lần, ta có không gian mẫu là $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$.

Ở đây ta quy ước SN có nghĩa là lần đầu tung được mặt sấp, lần sau tung được mặt ngửa. Các kí hiệu SS, NS, NN được hiểu một cách tương tự.

Ví dụ 2

Trong hộp có bốn quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử sau:

a) Lấy ngẫu nhiên một quả bóng;

b) Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc hai quả bóng;

c) Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng.

Hình 3

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$.

b) Do mỗi lần ta lấy hai quả bóng mà không tính đến thứ tự nên không gian mẫu sẽ gồm các tập con gồm hai phần tử của tập hợp $\{1; 2; 3; 4\}$, tức là:

$$\Omega = \{\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{3; 4\}\}.$$

c) Do hai quả bóng được lấy lần lượt nên ta cần phải tính đến thứ tự lấy bóng. Nếu lần đầu lấy được bóng số 3, lần sau lấy được bóng số 1 thì ta sẽ kí hiệu kết quả của phép thử là cặp $(3; 1)$. Khi đó không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 4); (4; 1);$$
$$(2; 3); (3; 2); (2; 4); (4; 2); (3; 4); (4; 3)\}.$$

1 Tìm không gian mẫu của phép thử thực hiện ở 1.

Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp ở Ví dụ 2, xem số, sau đó trả lại hộp, trộn đều rồi lại lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp đó. Hãy xác định không gian mẫu của phép thử hai lần lấy bóng này.

2. Biến cố

2 Xét trò chơi ở 1.

a) Nếu kết quả của phép thử là $(2; 3)$ thì ai là người chiến thắng?

b) Hãy liệt kê tất cả các kết quả của phép thử đem lại chiến thắng cho Cường.

Ta thấy sự kiện A: "Cường giành chiến thắng" xảy ra khi và chỉ khi kết quả hai lần gieo là $(1; 1)$, $(2; 2)$, $(3; 3)$, $(4; 4)$, $(5; 5)$, $(6; 6)$. Do đó, ta có thể đồng nhất A với tập hợp gồm các kết quả trên và viết:

$$A = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}.$$

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một ***biến cố***, kí hiệu là A, B, C, ...

Một kết quả thuộc A được gọi là kết quả làm cho A xảy ra, hoặc ***kết quả thuận lợi*** cho A.

Ví dụ 3

Xét phép thử gieo hai con xúc xắc.

a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Viết tập hợp mô tả biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 4". Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố đó?

Hình 4

Giải

a) Kết quả của phép thử là một cặp số $(i; j)$, trong đó i và j lần lượt là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai.

Không gian mẫu của phép thử là:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6);\\ &(2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6);\\ &(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6);\\ &(4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5); (4; 6);\\ &(5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6);\\ &(6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4); (6; 5); (6; 6)\}.\end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết không gian mẫu dưới dạng:

$$\Omega = \{(i; j) \mid i, j = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

b) Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện bằng 4". Tập hợp mô tả biến cố A là:

$$A = \{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\}.$$

Như vậy có ba kết quả thuận lợi cho biến cố A.

2 Trong phép thử gieo hai con xúc xắc, gọi B là biến cố "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm" và C là biến cố "Số chấm xuất hiện ở con xúc xắc thứ nhất gấp 2 lần số chấm xuất hiện ở con xúc xắc thứ hai".

a) Hãy xác định biến cố B và C bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho B và bao nhiêu kết quả thuận lợi cho C?

3 Trong phép thử gieo hai con xúc xắc, có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau?

D: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 13";

E: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 13".

Biến cố D luôn xảy ra, ta nói D là ***biến cố chắc chắn***.

Biến cố E không bao giờ xảy ra, ta nói E là ***biến cố không thể***.

Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω.

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là $\varnothing$.

Đôi khi ta cần dùng các quy tắc đếm và công thức tổ hợp để xác định số phần tử của không gian mẫu và số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố.

Ví dụ 4

Một nhóm có 5 bạn nam và 4 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên cùng một lúc ra 3 bạn đi làm công tác tình nguyện.

a) Hãy xác định số phần tử của không gian mẫu.

b) Hãy xác định số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Trong 3 bạn được chọn có đúng 2 bạn nữ".

Giải

a) Do ta chọn ra 3 bạn khác nhau từ 9 bạn trong nhóm và không tính đến thứ tự nên số phần tử của không gian mẫu là $C_9^3 = 84$.

b) Ta có C_4^2 cách chọn ra 2 bạn nữ từ 4 bạn nữ. Ứng với mỗi cách chọn 2 bạn nữ có C_5^1 cách chọn ra 1 bạn nam từ 5 bạn nam.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $C_4^2C_5^1$ cách chọn ra 2 bạn nữ và 1 bạn nam từ nhóm bạn.

Do đó số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Trong 3 bạn chọn ra có đúng 2 bạn nữ" là $C_4^2C_5^1 = 30$.

3 Trong Ví dụ 4, hãy xác định số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Trong 3 bạn được chọn có đúng một bạn nữ";

b) "Trong 3 bạn được chọn không có bạn nam nào".

BÀI TẬP

1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 100.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Số được chọn là số chính phương". Hãy viết tập hợp mô tả biến cố A.

c) Gọi B là biến cố "Số được chọn chia hết cho 4". Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho B.

2. Trong hộp có 3 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 3. Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử:

a) Lấy 1 thẻ từ hộp, xem số, trả thẻ vào hộp rồi lại lấy tiếp 1 thẻ từ hộp;

b) Lấy 1 thẻ từ hộp, xem số, bỏ ra ngoài rồi lại lấy tiếp một thẻ khác từ hộp;

c) Lấy đồng thời 2 thẻ từ hộp.

3. Gieo hai con xúc xắc. Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc hơn kém nhau 3 chấm";

b) "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5";

c) "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số lẻ".

4. Xếp 4 viên bi xanh và 5 viên bi trắng có các kích thước khác nhau thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên. Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Không có hai viên bi trắng nào xếp liền nhau";

b) "Bốn viên bi xanh được xếp liền nhau".

Bài 2. Xác suất của biến cố

Từ khoá: Biến cố đối; Xác suất của biến cố.

Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ một hộp có chứa 5 bi xanh và 5 bi đỏ có cùng kích thước và trọng lượng. Biến cố lấy được 2 viên bi cùng màu hay 2 viên bi khác màu có khả năng xảy ra cao hơn? Trong bài này ta sẽ tìm hiểu công thức tính xác suất để có thể so sánh được khả năng xảy ra của hai biến cố trên.

1. Xác suất của biến cố

1 Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Hãy so sánh khả năng xảy ra của hai biến cố:

A: "Mặt xuất hiện có số chấm là số chẵn";

B: "Mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ".

Do con xúc xắc được chế tạo cân đối và đồng chất nên các mặt của nó đều có cùng khả năng xuất hiện. Không gian mẫu của phép thử trên là:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Tập các kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$A = \{2; 4; 6\}.$$

Khi đó tỉ số $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ được gọi là *xác suất của biến cố A*.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa:

Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố.

Xác suất của biến cố A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

trong đó: $n(A)$ và $n(\Omega)$ lần lượt kí hiệu số phần tử của tập A và Ω.

Chú ý:

- Định nghĩa trên được gọi là định nghĩa cổ điển của xác suất.
- Với mọi biến cố A, $0 \le P(A) \le 1$.
- $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Xác suất của mỗi biến cố đo lường khả năng xảy ra của biến cố đó. Biến cố có khả năng xảy ra càng cao thì xác suất của nó càng gần 1.

Ví dụ 1

Hộp thứ nhất đựng 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 4. Hộp thứ hai đựng 6 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 6. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ.

a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Gọi A là biến cố "Hai thẻ lấy ra có cùng số". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A và tính xác suất của biến cố A.

c) Gọi B là biến cố "Tổng hai số trên hai thẻ lấy ra lớn hơn 8". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho B và tính xác suất của biến cố B.

Giải

a) Kết quả của mỗi lần thử là một cặp $(i; j)$ với $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ là số trên thẻ lấy ra từ hộp thứ nhất và $j \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ là số trên thẻ lấy ra từ hộp thứ hai. Không gian mẫu của phép thử là:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6);\\ &(2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6);\\ &(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6);\\ &(4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5); (4; 6)\}.\end{aligned}$$

b) Không gian mẫu gồm có 24 kết quả, tức là $n(\Omega) = 24$.

Biến cố $A = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4)\}$.

Số các kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = 4$. Do đó, xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

c) Biến cố $B = \{(3; 6); (4; 5); (4; 6)\}$.

Số các kết quả thuận lợi cho B là $n(B) = 3$. Do đó, xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

1 Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Hai mặt xuất hiện có cùng số chấm";

b) "Tổng số chấm trên hai mặt xuất hiện bằng 9".

Hình 1

Ví dụ 2

Trong hộp có 5 viên bi xanh và 7 viên bi trắng có kích thước và khối lượng như nhau. Ta lấy hai viên bi bằng hai cách như sau:

• Cách thứ nhất: Lấy ngẫu nhiên một viên bi, xem màu rồi trả lại hộp. Sau đó lại lấy một viên bi một cách ngẫu nhiên.

• Cách thứ hai: Lấy cùng một lúc hai viên bi từ hộp.

Gọi A là biến cố "Cả hai lần đều lấy được bi màu trắng". Với cách lấy bi nào thì biến cố A có khả năng xảy ra cao hơn?

Giải

Theo cách lấy bi thứ nhất, áp dụng quy tắc nhân ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 12 \,.\, 12 = 144$.

Số khả năng thuận lợi cho A là $n(A) = 7 \,.\, 7 = 49$.

Do đó xác suất của biến cố A theo cách lấy bi thứ nhất là $\frac{49}{144}$.

Theo cách lấy bi thứ hai, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$.

Số khả năng thuận lợi cho A là $n(A) = C_7^2 = 21$.

Do đó xác suất của biến cố A theo cách lấy bi thứ hai là $\frac{21}{66} = \frac{7}{22}$.

Vì $\frac{49}{144} > \frac{7}{22}$ nên với cách lấy bi thứ nhất thì biến cố A có khả năng xảy ra cao hơn.

Hãy tính xác suất của hai biến cố được nêu ra ở hoạt động khởi động của bài học.

2. Tính xác suất bằng sơ đồ hình cây

Trong chương VIII, chúng ta đã được làm quen với phương pháp sử dụng sơ đồ hình cây để liệt kê các kết quả của một thí nghiệm. Ta cũng có thể sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất.

Ví dụ 3

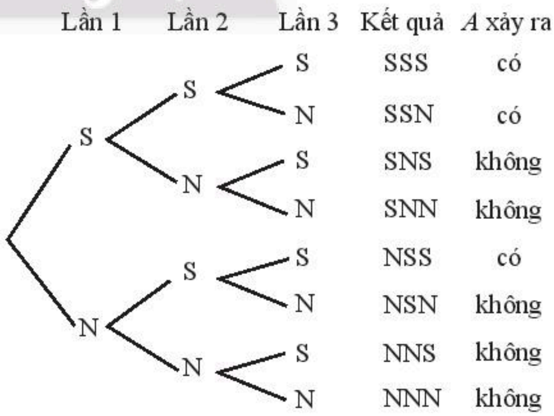
Tung một đồng xu cân đối và đồng chất 3 lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A: "Trong 3 lần tung có ít nhất 2 lần liên tiếp xuất hiện mặt sấp".

Giải

Kí hiệu S nếu tung được mặt sấp, N nếu tung được mặt ngửa. Các kết quả có thể xảy ra trong 3 lần tung được thể hiện ở sơ đồ hình cây như Hình 2.

Có tất cả 8 kết quả có thể xảy ra, trong đó có 3 kết quả thuận lợi cho A. Do đó:

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$



Hình 2

Ba bạn Lan, Mai và Đào đặt thẻ học sinh của mình vào một hộp kín, sau đó mỗi bạn lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố "Không bạn nào lấy đúng thẻ của mình".

3. Biến cố đối

Một hộp có 10 tấm thẻ giống nhau được đánh số lần lượt từ 1 đến 10. Chọn ra ngẫu nhiên cùng một lúc 3 thẻ. Tính xác suất của biến cố tích các số ghi trên 3 thẻ đó là số chẵn.

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

$$\overline{A} = \Omega \setminus A; \qquad P(\overline{A}) + P(A) = 1.$$

Ví dụ 4

Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tích số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc đó là số chẵn".

a) Hãy tìm biến cố đối của biến cố A.

b) Hãy tính xác suất của biến cố A.

Giải

a) Biến cố đối của biến cố A là biến cố "Tích các số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc đó là số lẻ".

b) Tổng số kết quả có thể xảy ra của phép thử là $n(\Omega) = 6^3$.

$\overline{A}$ xảy ra khi mặt xuất hiện trên cả ba con xúc xắc đều có số chấm là số lẻ. Số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $n(\overline{A}) = 3^3$.

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là $P(\overline{A}) = \dfrac{3^3}{6^3} = \dfrac{1}{8}$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{7}{8}$.

Gieo đồng thời ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tích các số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc chia hết cho 3";

b) "Tổng các số chấm ở mặt xuất hiện trên ba con xúc xắc lớn hơn 4".

Trong hộp có 3 bi xanh, 4 bi đỏ và 5 bi vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên từ trong hộp 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 bi lấy ra:

a) có ít nhất 1 bi xanh.

b) có ít nhất 2 bi đỏ.

4. Nguyên lí xác suất bé

Có 1 hạt gạo nếp nằm lẫn trong một cái thùng chứa 10 kg gạo tẻ. Lấy ngẫu nhiên 1 hạt gạo từ thùng. Theo bạn, hạt gạo lấy ra là gạo tẻ hay gạo nếp?

Trong thực tế, các biến cố có xác suất xảy ra gần bằng 1 thì gần như là luôn xảy ra trong một phép thử. Ngược lại, các biến cố mà xác suất xảy ra gần bằng 0 thì gần như không xảy ra trong một phép thử.

Trong Lí thuyết Xác suất, Nguyên lí xác suất bé được phát biểu như sau:

Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.

Ví dụ như khi một con tàu lưu thông trên biển, xác suất nó bị đắm là số dương. Tuy nhiên, nếu tuân thủ các quy tắc an toàn thì xác suất xảy ra biến cố này là rất nhỏ, con tàu có thể yên tâm hoạt động.

Nếu một nhà sản xuất tuyên bố tỉ lệ gây sốc phản vệ nặng khi tiêm một loại vắc xin là rất nhỏ, chỉ khoảng 0,001, thì có thể tiêm vắc xin đó cho mọi người được không? Câu trả lời là không, vì sức khoẻ và tính mạng con người là vô giá, nếu tiêm loại vắc xin đó cho hàng tỉ người thì khả năng có nhiều người bị sốc phản vệ nặng là rất cao.

BÀI TẬP

1. Tung ba đồng xu cân đối và đồng chất. Xác định biến cố đối của mỗi biến cố sau và tính xác suất của nó.

a) "Xuất hiện ba mặt sấp"; b) "Xuất hiện ít nhất một mặt sấp".

2. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện nhỏ hơn 10"; b) "Tích số chấm xuất hiện chia hết cho 3".

3. Hộp thứ nhất đựng 1 thẻ xanh, 1 thẻ đỏ và 1 thẻ vàng. Hộp thứ hai đựng 1 thẻ xanh và 1 thẻ đỏ. Các tấm thẻ có kích thước và khối lượng như nhau. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ.

a) Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của biến cố "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ màu đỏ".

4. Trong hộp có một số quả bóng màu xanh và màu đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. An nhận thấy nếu lấy ngẫu nhiên hai quả bóng từ hộp thì xác suất để hai quả này khác màu là 0,6. Hỏi xác suất để hai quả bóng lấy ra cùng màu là bao nhiêu?

Hình 3

5. Năm bạn Nhân, Lễ, Nghĩa, Trí và Tín xếp một cách ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố:

a) "Nhân và Tín không đứng cạnh nhau";

b) "Trí không đứng ở đầu hàng".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có ba chữ số.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất của biến cố "Số được chọn là lập phương của một số nguyên".

c) Tính xác suất của biến cố "Số được chọn chia hết cho 5".

2. Gieo bốn đồng xu cân đối và đồng chất. Xác định biến cố đối của mỗi biến cố sau và tính xác suất của nó.

a) "Xuất hiện ít nhất ba mặt sấp";

b) "Xuất hiện ít nhất một mặt ngửa".

3. Gieo ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện nhỏ hơn 5";

b) "Tích số chấm xuất hiện chia hết cho 5".

4. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 5 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ. Các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Bốn viên bi lấy ra có cùng màu";

b) "Trong 4 viên bi lấy ra có đúng 1 viên bi xanh";

c) "Trong 4 viên bi lấy ra có đủ cả bi xanh và bi đỏ".

5. Một nhóm học sinh được chia vào 4 tổ, mỗi tổ có 3 học sinh. Chọn ra ngẫu nhiên từ nhóm đó 4 học sinh. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Bốn bạn thuộc 4 tổ khác nhau";

b) "Bốn bạn thuộc 2 tổ khác nhau".

6. Một cơ thể có kiểu gen là AaBbDdEe, các cặp alen nằm trên các cặp nhiễm sắc thể tương đồng khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một giao tử của cơ thể sau khi giảm phân. Giả sử tất cả các giao tử sinh ra có sức sống như nhau. Tính xác suất để giao tử được chọn mang đầy đủ các alen trội.

7. Sắp xếp 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 5 một cách ngẫu nhiên để tạo thành một số tự nhiên a có 5 chữ số. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "a là số chẵn";

b) "a chia hết cho 5";

c) "$a \geq 32\,000$";

d) "Trong các chữ số của a không có 2 chữ số lẻ nào đứng cạnh nhau".

8. Lớp 10A có 20 bạn nữ, 25 bạn nam. Lớp 10B có 24 bạn nữ, 21 bạn nam. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi lớp ra 2 bạn đi tập văn nghệ. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Trong 4 bạn được chọn có ít nhất 1 bạn nam";

b) "Trong 4 bạn được chọn có đủ cả nam và nữ".

9. Trong hộp có 5 bóng xanh, 6 bóng đỏ và 2 bóng vàng. Các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy 2 bóng từ hộp, xem màu, trả lại hộp rồi lại lấy tiếp 1 bóng nữa từ hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Ba bóng lấy ra cùng màu";

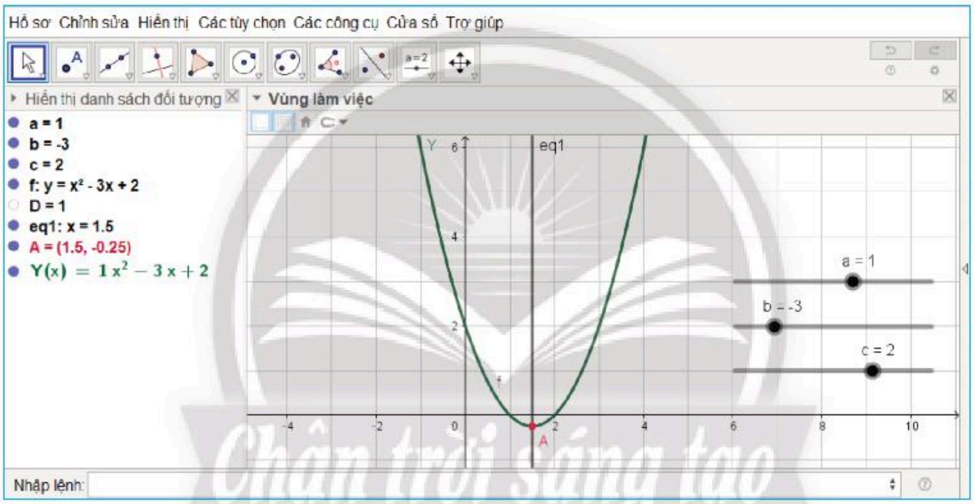
b) "Bóng lấy ra lần 2 là bóng xanh";

c) "Ba bóng lấy ra có 3 màu khác nhau".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

BÀI 1. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI BẰNG PHẦN MỀM

GeoGebra



MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ trên mặt phẳng toạ độ.

– Xem xét sự thay đổi hình dạng của đồ thị hàm số bậc hai (parabol) khi thay đổi các hệ số a, b, c trong công thức hàm số.

– Ôn tập và minh hoạ các tính chất đã học về hàm số bậc hai.

– Thực hành sử dụng phần mềm để thiết kế đồ hoạ liên quan đến đồ thị hàm bậc hai.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

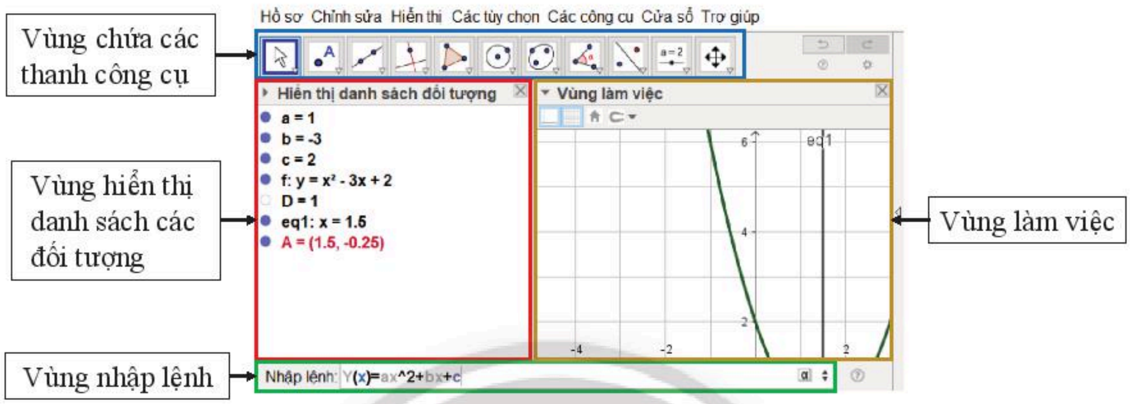
– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 10.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để vẽ đồ thị trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên bốn vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;
2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;
3. Vùng làm việc: chứa đồ thị vẽ được và các thanh trượt biểu thị các hệ số *a*, *b*, *c*;
4. Vùng nhập lệnh: để nhập công thức các hàm số và biểu thức.



Hình 1. Các vùng làm việc của GeoGebra Classic 5

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

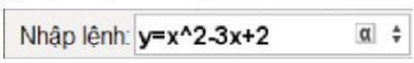
HOẠT ĐỘNG 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với *a*, *b*, *c* nhập từ bàn phím

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$.

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org để sử dụng phiên bản online.

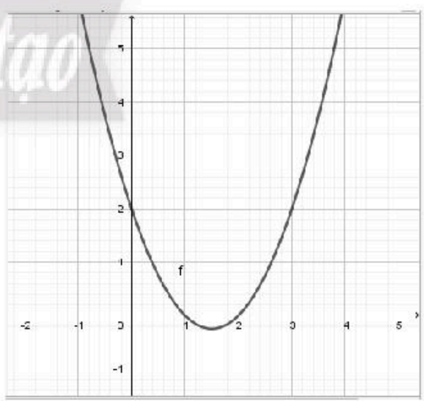
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

Nhập phương trình bậc hai theo cú pháp **y=x^2–3x+2** vào vùng nhập lệnh (Hình 2).



Hình 2

Ta có ngay parabol trên vùng làm việc như Hình 3.



Hình 3

Vẽ đồ thị các hàm số bậc hai sau:

a) $y = -x^2 + 4x - 3$; b) $y = x^2 + 2$;

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; d) $y = x^2 - 4x + 4$.

HOẠT ĐỘNG 2. Vẽ parabol với tham số thay đổi bằng thanh trượt

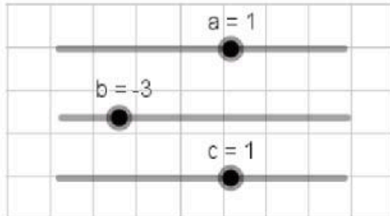
1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org để sử dụng phiên bản online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Tạo các thanh trượt biểu thị các tham số a, b, c bằng cách nhấp chuột liên tiếp vào thanh công cụ a=2 và vào vị trí màn hình nơi mà ta muốn đặt thanh trượt (Hình 4).

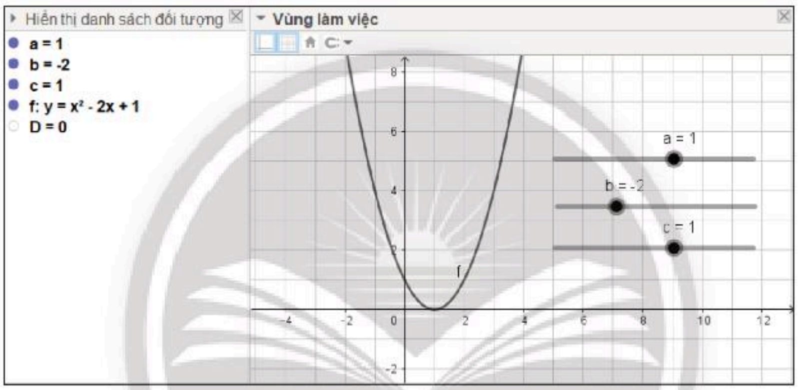
– Nhập công thức hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ tại vùng nhập lệnh theo cú pháp: **y = ax^2 + bx + c**.

– Nhập công thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng cách gõ: **D = b^2 – 4ac**.



Hình 4

– Quan sát đồ thị được vẽ trên vùng làm việc:



Hình 5

– Dùng chuột điều chỉnh các thanh trượt a, b, c để có giá trị mong muốn.

– Quan sát sự thay đổi của hình dạng đồ thị (parabol) và Δ theo sự thay đổi các hệ số a, b, c trong công thức hàm số.

– Chụp màn hình để có kết quả làm báo cáo, thu hoạch, trình chiếu.

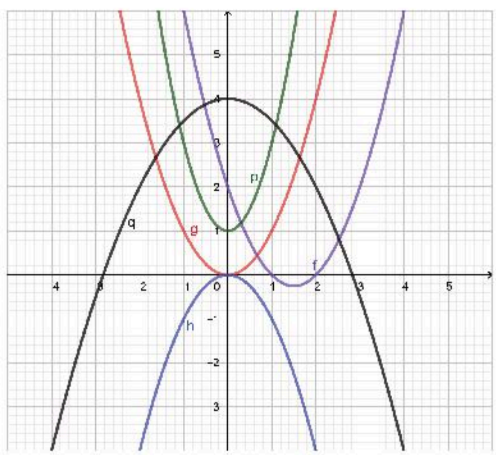
3. Nêu các kết luận về tính chất của đồ thị quan sát được trên hình vẽ.

2 Điều chỉnh a, b, c để vẽ được nhiều dạng parabol khác nhau:

a) $y = x^2 - 3x + 2$; b) $y = x^2$;

c) $y = -x^2$; d) $y = 2x^2 + 1$;

e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.



Hình 6

HOẠT ĐỘNG 3. Vẽ cổng chào hình parabol

Một cổng chào hình parabol có chiều cao là 7,6 m và khoảng cách giữa hai chân cổng là 9 m. Hãy vẽ parabol đó.

Hướng dẫn:

– Ta chọn hệ toạ độ để parabol có phương trình $y = -ax^2 + h$.

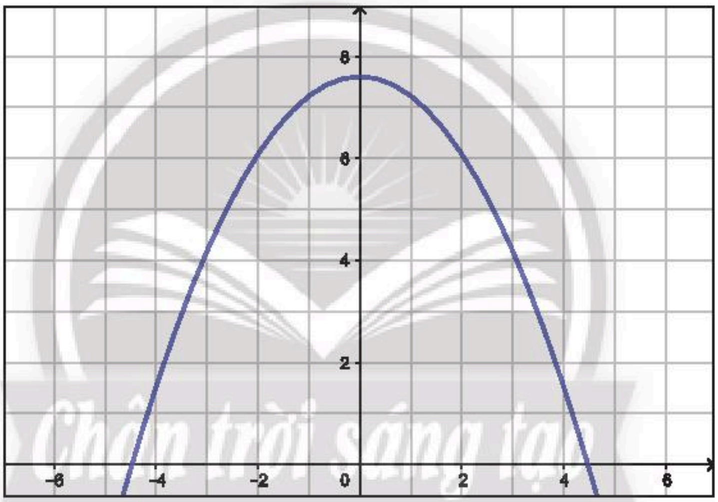
– Ta có: h = 7,6 m; d = 9 m, suy ra điểm M(4,5; 0) thuộc parabol.

– Thay toạ độ điểm M vào phương trình parabol ta tính được $a = \dfrac{7,6}{4,5^2} \approx 0,38$.

– Vậy phương trình của parabol là $y = -0,38x^2 + 7,6$.

Hình 7

– Dùng GeoGebra theo cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai đã hướng dẫn trong Hoạt động 1, ta vẽ được parabol biểu diễn cổng chào như Hình 8.

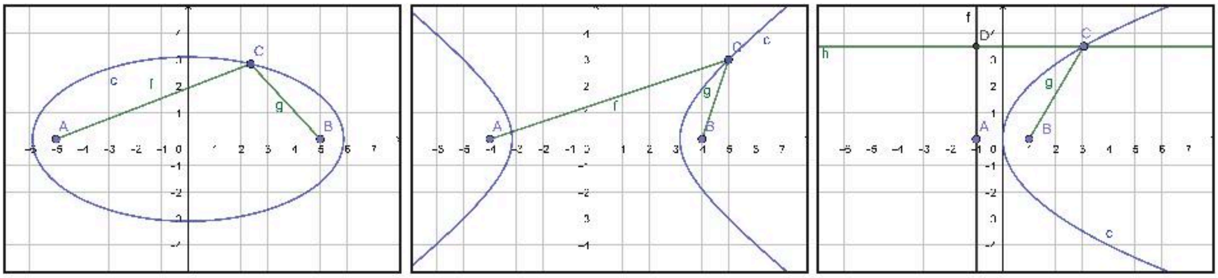


Hình 8

Hãy tự thiết kế một cổng chào hình parabol.

BÀI 2. VẼ BA ĐƯỜNG CONIC BẰNG PHẦN MỀM

GeoGebra



MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra Classic 5 để vẽ elip, hypebol, parabol trên mặt phẳng toạ độ.

– Xem xét sự thay đổi hình dạng của các đường khi thay đổi các tham số trong phương trình chính tắc.

– Ôn tập và minh hoạ các tính chất đã học về ba đường conic.

– Thực hành sử dụng phần mềm để thiết kế đồ hoạ liên quan đến ba đường conic.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt GeoGebra Classic 5 hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 10.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để vẽ đồ thị trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên bốn vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;

2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;

3. Vùng làm việc: chứa đồ thị vẽ được;

4. Vùng nhập lệnh: để nhập phương trình các đường conic muốn vẽ.

Hình 1. Các vùng làm việc của GeoGebra Classic 5

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

1. Khởi động phần mềm GeoGebra Classic 5 đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web https://www.geogebra.org để sử dụng phiên bản online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

HOẠT ĐỘNG 1. Vẽ elip bằng phần mềm GeoGebra

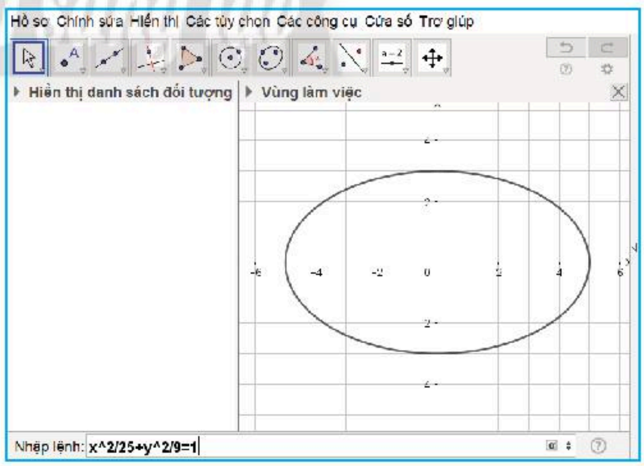
A. Vẽ elip theo phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ví dụ: Vẽ elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Hướng dẫn:

– Nhập phương trình elip theo cú pháp **x^2/25 + y^2/9 = 1** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ elip xuất hiện trên vùng làm việc (Hình 2).



Hình 2. Vẽ elip theo phương trình chính tắc

1 Vẽ các elip sau:

a) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{4}=1$;

b) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$;

c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

B. Ứng dụng của elip trong thiết kế

Ví dụ: Một gầm cầu có mặt cắt hình nửa elip cao 6 m rộng 20 m. Hãy vẽ elip biểu diễn mặt cắt đó.

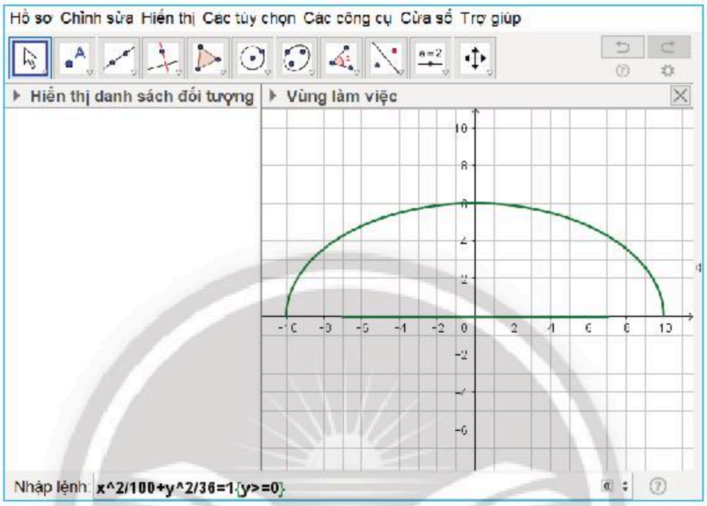
Hướng dẫn:

Ta có $a = 10$, $b = 6$ nên elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Thao tác:

– Nhập phương trình elip theo cú pháp **x^2/100 + y^2/36 = 1 {y>=0}** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ elip trên vùng làm việc (Hình 3).

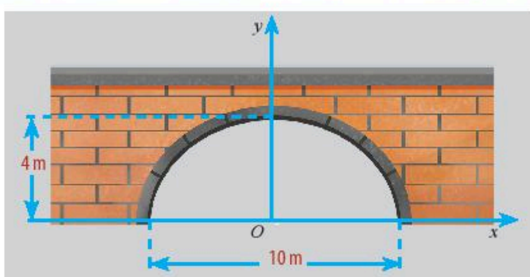


Hình 3

– Vẽ trang trí mô phỏng theo thực tế:

Hình 4. Gầm cầu có dạng hình nửa elip

Thiết kế một đường hầm có mặt cắt hình nửa elip cao 4 m rộng 10 m.



Hình 5. Đường hầm có mặt cắt hình nửa elip

HOẠT ĐỘNG 2. Vẽ hypebol bằng phần mềm GeoGebra

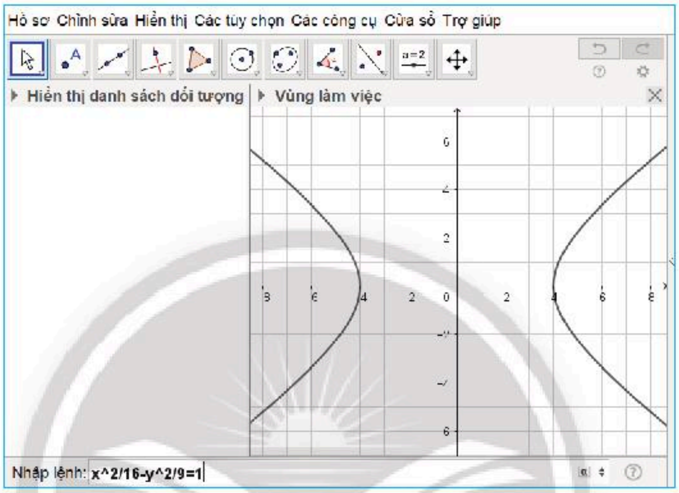
A. Vẽ hypebol theo phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Ví dụ: Vẽ hypebol có phương trình $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Hướng dẫn:

– Nhập phương trình hypebol theo cú pháp **x^2/16–y^2/9=1** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ hypebol xuất hiện trên vùng làm việc.



Hình 6. Vẽ hypebol theo phương trình chính tắc

3 Vẽ các hypebol sau:

a) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$; b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$; c) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

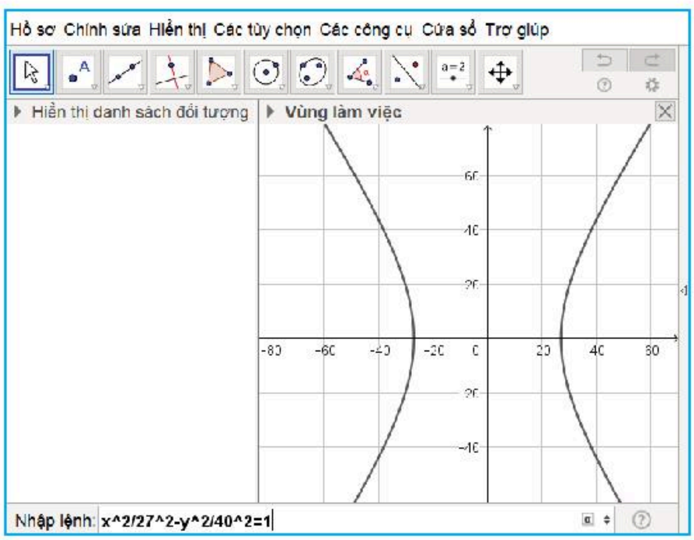
B. Ứng dụng của hypebol trong thiết kế

Ví dụ: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{27^2}-\frac{y^2}{40^2}=1$. Vẽ hypebol biểu diễn mặt cắt đó.

Hướng dẫn:

– Nhập phương trình hypebol theo cú pháp **x^2/27^2–y^2/40^2=1** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ hypebol trên vùng làm việc (Hình 7).



Hình 7

– Vẽ trang trí mô phỏng theo thực tế:

Hình 8

HOẠT ĐỘNG 3. Vẽ parabol bằng phần mềm GeoGebra

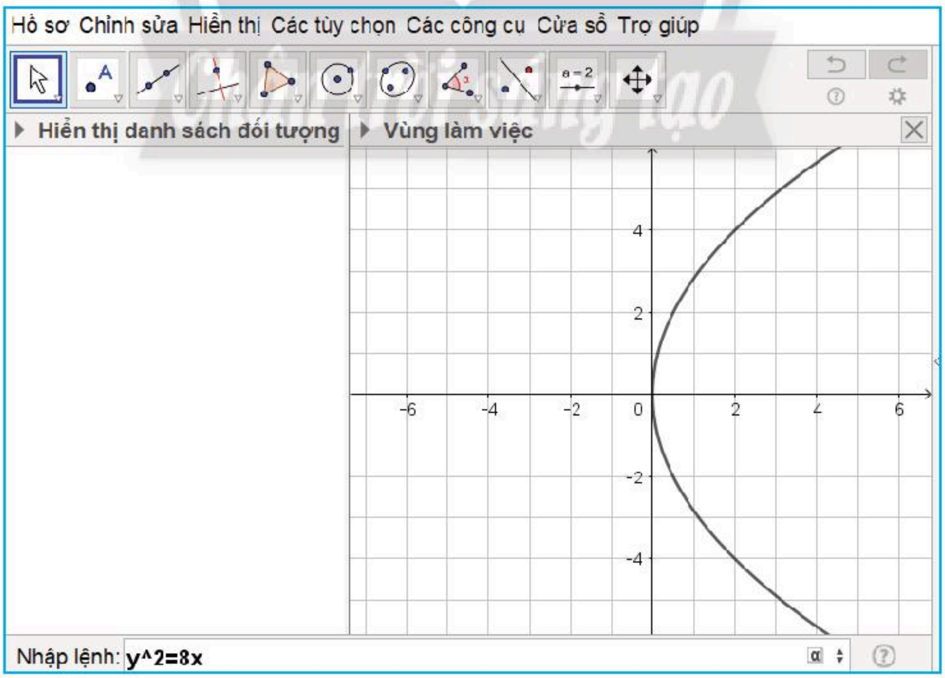
A. Vẽ parabol theo phương trình chính tắc $y^2 = 2px$

Ví dụ: Vẽ parabol có phương trình $y^2 = 8x$.

Hướng dẫn:

– Nhập phương trình parabol theo cú pháp **y^2=8x** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ parabol xuất hiện trên vùng làm việc (Hình 9).



Hình 9. Vẽ parabol theo phương trình chính tắc

4 Vẽ các parabol sau:

a) $y^2 = 16x$; b) $y^2 = x$; c) $y^2 = 32x$.

B. Ứng dụng của parabol trong thiết kế

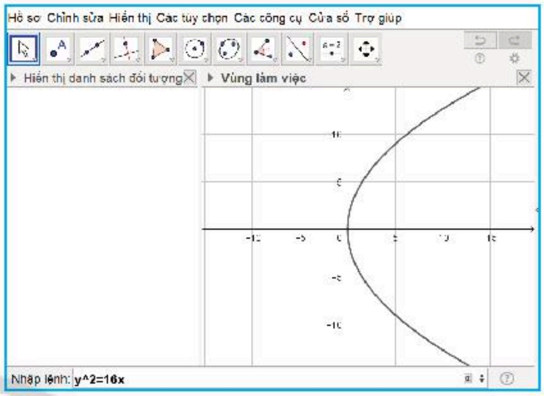
Ví dụ: Thiết kế một chảo ăng ten có mặt cắt hình parabol, biết khoảng cách từ đỉnh của parabol đó tới đầu thu là $\frac{p}{2} = 1$.

Hướng dẫn:

– Ta có phương trình của parabol là $y^2 = 16x$.

– Nhập phương trình parabol theo cú pháp **y^2=16x** vào vùng nhập lệnh.

– Quan sát hình vẽ parabol trên vùng làm việc (Hình 10).

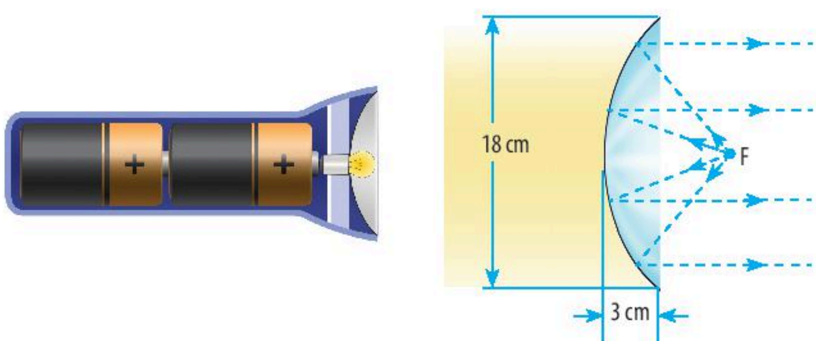


Hình 10

– Vẽ trang trí mô phỏng theo thực tế:

Hình 11

5 Thiết kế một choá đèn có mặt cắt hình parabol với kích thước được cho trong hình sau:



Hình 12

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

B

Biến cố

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một biến cố, kí hiệu là A, B, C, ...

Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A.

Biệt thức của tam thức bậc hai

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

C

Chỉnh hợp

Mỗi cách lấy k phần tử của A ($1 \le k \le n$) và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k.

H

Hoán vị

Mỗi cách sắp xếp n phần tử của A ($n \ge 1$) theo một thứ tự gọi là một hoán vị các phần tử đó (gọi tắt là hoán vị của A hay của n phần tử). Số hoán vị của n phần tử được kí hiệu là P_n.

K

Kết quả thuận lợi

Mỗi kết quả thuộc biến cố A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là không gian mẫu, kí hiệu là Ω.

M

Mặt phẳng toạ độ *Oxy*

Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục toạ độ Oxy

N

Nghiệm của bất phương trình bậc hai một ẩn

Là các giá trị của biến mà khi thay vào bất phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Nguyên lí xác suất bé

Các biến cố có xác suất xảy ra gần bằng 0 thì có thể coi như không xảy ra trong một phép thử.

P

Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử), là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Q

Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc B. Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m + n$ cách.

Quy tắc nhân

Giả sử một công việc được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m.n$ cách.

T

Tổ hợp

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \ge 1$).
Mỗi tập con gồm k phần tử ($1 \le k \le n$) của A được gọi là một ***tổ hợp*** chập k của n phần tử. Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k.

V

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

X

Xác suất của biến cố

Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử thì xác suất của biến cố A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN HÀ SƠN
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: THÁI HỮU DƯƠNG
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: ĐẶNG THỊ THUÝ – TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

TOÁN 10 – TẬP HAI (Chân trời sáng tạo)

Mã số:
In………bản, (QĐ in số….) Khổ 19x26,5 cm.
Đơn vị in:……………………..
Cơ sở in:………………………
Sô ĐKXB:………………………
Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….
In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….
Mã số ISBN:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 10, Tập một
2. Toán 10, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 10
4. Ngữ văn 10, Tập một
5. Ngữ văn 10, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 10
7. Tiếng Anh 10 Friends Global
8. Lịch sử 10
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 10
10. Địa lí 10
11. Chuyên đề học tập Địa lí 10
12. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
13. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
14. Vật lí 10
15. Chuyên đề học tập Vật lí 10
16. Hoá học 10
17. Chuyên đề học tập Hoá học 10
18. Sinh học 10
19. Chuyên đề học tập Sinh học 10
20. Âm nhạc 10
21. Chuyên đề học tập Âm nhạc 10
22. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 1)
23. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (BẢN 2)

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.